11 - Les vecteurs

1. Bipoint

1.1. Définition

Un bipoint est un couple de points (A;B), avec A pour origine et B comme extrémité. On le représente généralement comme une flèche allant de A vers B : $A \to B$.

1.2. Propriétés

Longueur	La **longueur** d'un bipoint (A;B) est la distance entre A et B, notée $\delta(A;B)$.
Direction	2 bipoints (A;B) et (C;D) ont la même **direction** si la droite passant par A et B est parallèle à celle passant par C et D.
Sens	2 bipoints ayant la même direction peuvent avoir le même sens ou être de **sens opposé**.
Équipollent	2 bipoints sont dit équipollents lorsqu'ils ont la **même longueur**, la **même direction** et le **même sens**. On note $(A;B) \sim (C;D)$

Si (A;B) est **équipollent** à (C;D), alors :
- ACBD est parallélogramme (éventuellement dégénéré).
- [AD] et [BC] ont le même milieu M.
- Il existe une translation envoyant A sur B et C sur D.

2. Vecteurs

2.1. Définitions

Une vecteur est l'ensemble des bipoints équipollents à un bipoint donné. L'ensemble des bipoints équipollent à (A;B) est noté $\overrightarrow{AB}$, c'est la notation usuelle du “vecteur AB”.

Tout bipoint du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé représentant de $\overrightarrow{AB}$.

L’ensemble des vecteurs du plan est noté V_2 et l’ensemble des vecteurs de l’espace est noté V_3 .

Tous les représentants d’un vecteur ont le même sens, la même direction et la même longueur. Cette longueur est appelée **norme** du vecteur.

2.2. Remarque

Un vecteur étant un ensemble de bipoints, il est entièrement défini par sa direction, son sens et sa norme (longueur), mais pas son emplacement car il y a une infinité de possibilités.

2.3. Propriétés

Si $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{0}$ alors A = B

Si $\overrightarrow{AC}$ = $\overrightarrow{BC}$ alors A = B (selon **Chasles** : AC = BC => AC - CB = 0 => AB = 0 => A = B

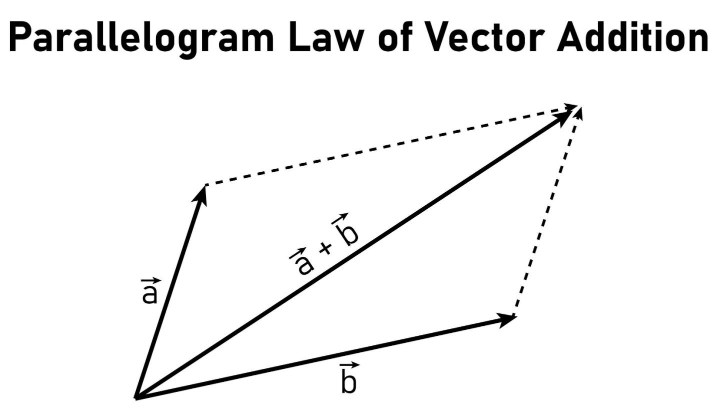
Si $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{AC}$ = $\overrightarrow{BD}$

2.4. Complément

L’équipollence est une relation d'équivalence dans l'ensemble des bipoints car elle est :

- réflexive : $(A;B) \sim (A;B)$
- symétrique : $(A;B) \sim (C;D) \implies (C;D) \sim (A;B)$
- transitive : $(A;B) \sim (C;D)$ et $(C;D) \sim (E;F)$ alors $(A;B) \sim (E;F)$

2.5. Addition (et soustraction) de vecteurs



2.5.1 Relation de Chasles (**TRÈS IMPORTANT**)

La relation de Chasles nous dit ceci :

$\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{BC}$ = $\overrightarrow{AC}$

Inversement, un vecteur peut aussi se décomposer en la somme de 2 vecteurs :

$\overrightarrow{AC}$= $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{BC}$

En outre

$\overrightarrow{AB}$ = -$\overrightarrow{BA}$

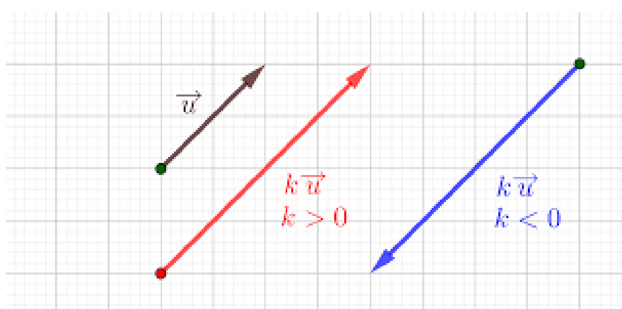
Et donc (par exemple) :

$\overrightarrow{AB}$ - $\overrightarrow{AC}$ = $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{CA}$ = $\overrightarrow{CA}$ + $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{CB}$

2.5.2 Propriétés de l'addition de vecteurs

Associativité	$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$
Elément neutre	$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$
Opposé	$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
Commutativité	$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$

2.6. Multiplication d'un vecteur par un nombre



2.6.1 Définition

Le produit d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ par un nombre réel λ, noté $\lambda.\overrightarrow{v}$ ou aussi $\lambda\overrightarrow{v}$ est le vecteur de même direction que $\overrightarrow{v}$ si λ est positif, et de direction opposée à $\overrightarrow{v}$ si λ est négatif, et dont la norme est celle de $\overrightarrow{v}$ multipliée par $|\lambda|$.

Le nombre réel λ est appelé **scalaire**, Mais ATTENTION, ce terme n'a rien à voir avec la notion de “**produit scalaire**” qui est le produit de 2 vecteurs $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ (cf. plus loin).

2.6.2 Propriétés

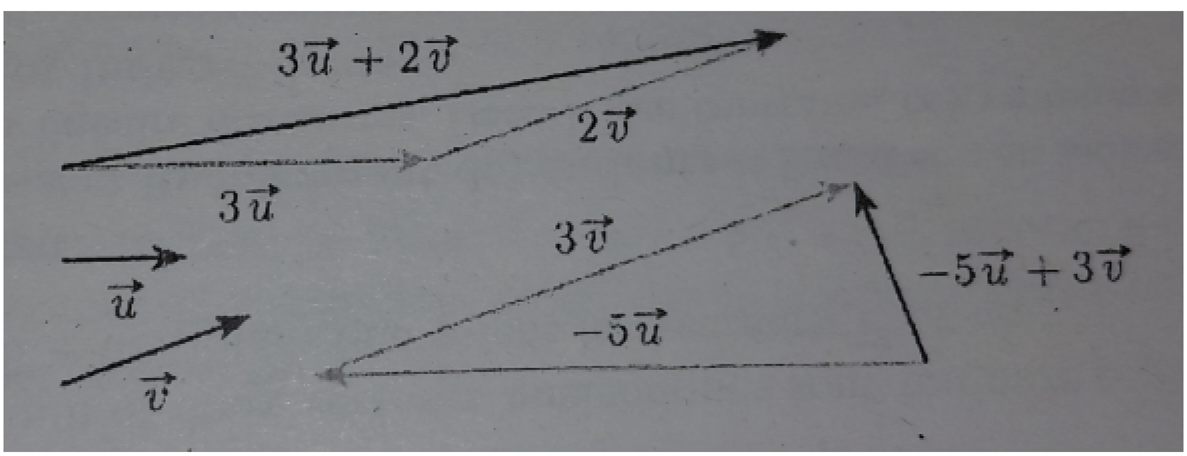
$1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$	$\lambda\mu\overrightarrow{v} = \mu\lambda\overrightarrow{v}$
$0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$	$(\lambda+\mu)\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{v}$
$-1\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}$	$\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$

Le vecteur $\overrightarrow{(A;B)}$ peut être aussi défini comme le vecteur $\overrightarrow{(A';B')}$ ou A' et B' sont les images des points A et B selon une homothétie de centre quelconque et de rapport λ

2.7. Combinaisons linéaires, colinéarité, coplanaire, projeté orthogonal et calcul de composante

2.7.1 Définitions

2.7.1.1 Combinaisons linéaires



Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, deux vecteurs quelconques. A partir de ceux ci on peut construire par exemple les vecteurs $3\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}$ et $-5\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$. On dit que **ces 2 nouveaux vecteurs sont des combinaisons linéaires** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

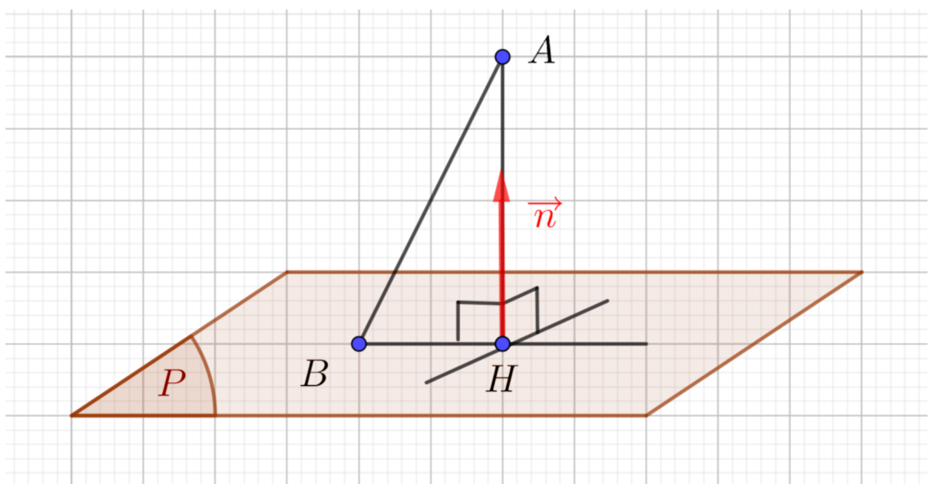
2.7.1.2 Colinéarité

Dans le plan	Deux vecteurs du plan ou de l'espace sont dits **colinéaire si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un scalaire,** par exemple : $\overrightarrow{u} = 3.\overrightarrow{v}$.
Dans l'espace	

2.7.1.3 Coplanaires

Dans le plan	2 vecteurs sont toujours coplanaires.
Dans l'espace	3 vecteurs de V_3 sont dits coplanaires si au moins l'un d'eux est une combinaison linéaire des 2 autres.

2.7.1.4 Projeté orthogonal



Le projeté orthogonal d'un point A sur un plan P est le point H du plan tel que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ (ou $\overrightarrow{HA}$) est normal au plan P.

2.7.1.5 Calcul de la composante

Calculer les **composantes d'un vecteur**, c'est essentiellement répondre à la question : « De combien ce vecteur avance-t-il horizontalement et verticalement ? »

Si le vecteur $\vec{u}$ relie un point de départ $A(x_A, y_A)$ à un point d'arrivée $B(x_B, y_B)$, les composantes se calculent par la différence des coordonnées :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Par exemple, imaginons deux points dans un repère :

- Le point de départ $A(2, 3)$
- Le point d'arrivée $B(7, 5)$

Nous voulons trouver les composantes du vecteur $\vec{AB}$ qui relie ces deux points.

Pour trouver les composantes, on applique

la règle : "Arrivée moins Départ".

1. Calcul de la composante horizontale (x) :
   On prend l'abscisse de B et on soustrait celle de A.
   $x = 7 - 2 = 5$
   (Le vecteur avance de 5 unités vers la droite).
2. Calcul de la composante verticale (y) :
   On prend l'ordonnée de B et on soustrait celle de A.
   $y = 5 - 3 = 2$
   (Le vecteur monte de 2 unités vers le haut).

Résultat final

Le vecteur $\vec{AB}$ a pour composantes $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.7.2 Propriétés

Les propriétés qui suivent sont **valables dans le plan et dans l'espace** :

Toute combinaison linéaire de 2 vecteurs situés dans un même plan (coplanaires) donne un vecteur du même plan.
Si $\alpha_1 \dots \alpha_n$ sont des nombres réels et $\overrightarrow{v_1} \dots \overrightarrow{v_n}$ des vecteurs, le vecteur $\overrightarrow{t} = \alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{v_n}$ est **une combinaison linéaire de ces vecteurs**.
Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\overrightarrow{u}$
Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction (mais pas forcément le même sens).
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont 2 vecteurs non colinéaires et $\overrightarrow{w}$ est un vecteur quelconque, alors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux nombres réels λ et μ tels que $\overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$
Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ et deux vecteurs quelconques sont toujours coplanaires car $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u} + 0\overrightarrow{v}$, quels quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Complément #1 (hors programme) : $\overrightarrow{v_1} \dots \overrightarrow{v_n}$ Les vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement **si le vecteur nul s'écrit comme combinaison linéaire de ces n vecteurs avec au moins un coefficient non nul**, autrement dit si il existe des nombres réels $\alpha_1 \dots \alpha_n$ **non tous nuls** et tels que $\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}$
Complément #2 (hors programme) : Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{v_1} \dots \overrightarrow{v_n}$ sont **linéairement indépendants** si et seulement **si la seule combinaison linéaire donnant le vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls**, autrement dit on a $\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}$ avec $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

2.8 Vecteurs : Déterminant, Produit scalaire et Norme

2.8.1 Déterminant

Dans le plan	Le déterminant de **2 vecteurs** se note $\det(\vec{u}, \vec{v})$ et sert à mesurer : ● **l'aire** de la forme qu'ils dessinent. ● Si ce déterminant est nul ($\det = 0$), cela signifie que les deux vecteurs sont **colinéaires**. ● Si ce déterminant est non nul ($\det \neq 0$), cela signifie que les deux vecteurs sont non **colinéaires**.
Dans l'espace	Le déterminant de **3 vecteurs** se note $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et sert à mesurer : ● Le **volume** du parallélépipède formé par ces trois vecteurs. ● Si ce déterminant est nul ($\det = 0$), cela signifie que ces trois vecteurs sont **coplanaires**. ● Si ce déterminant est non nul ($\det \neq 0$), cela signifie que les trois vecteurs ne sont pas dans le même plan (ils définissent un repère).

Voici comment calculer le déterminant :

	Pour deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, leur déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v})$ se calcule avec la règle du "produit en croix" : $$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x \cdot y' - y \cdot x'$$
Dans l'espace	Soient trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$. On écrit le déterminant sous cette forme : $$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$ **Attention au signe :** Présence du **moins** devant le deuxième terme (y). Les signes alternent toujours : $+, -, +$.

2.8.2 Produit Scalaire

Le produit scalaire est le résultat du produit de deux vecteurs entre eux. **Le résultat n'est pas un vecteur, mais un nombre réel.**

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** si et seulement si leur produit scalaire est nul: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Cette convention inclut le **vecteur nul** $\vec{0}$, qui est considéré comme orthogonal à tous les autres vecteurs de l'espace car son produit scalaire avec n'importe quel vecteur est toujours égal à zéro.

Voici comment calculer le produit scalaire :

Dans le Plan	Si $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
Dans l'espace	Si $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

2.8.3 Norme d’un vecteur

La norme d’un vecteur $\vec{u}$ est **sa longueur**.

Voici comment calculer la norme d’un vecteur :

Dans le Plan	Si $\vec{u}(x, y)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
Dans l’espace	Si $\vec{u}(x, y, z)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Nota (**IMPORTANT**) : La norme au carré d'un vecteur $\vec{u}$ est égale au produit scalaire de ce vecteur par lui-même :

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

2.8.4 Calculer l’angle entre 2 vecteurs

Pour calculer l'angle θ entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en utilisant leur produit scalaire et leur norme, on utilise cette formule :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

2.9 Équation cartésienne

2.9.1 Définition

L'équation cartésienne est la "carte d'identité" d'une droite dans un plan ou d’un plan dans l'espace.

Dans un Plan	L’équation cartésienne d’une droite dans un plan a pour forme générale $ax + by + c = 0$ Cette équation permet de définir tous les points $M(x, y)$ qui appartiennent à cette droite.
Dans l’Espace	L’équation cartésienne d’un plan dans l’espace a pour forme générale $ax + by + cz + d = 0$ Cette équation permet de définir tous les points $M(x, y, z)$ qui appartiennent à ce plan.

2.9.2 Lien entre produit scalaire et équation cartésienne

Le produit scalaire permet de définir un plan ou une droite à partir d'un **vecteur normal** $\vec{n}$.

Pour n'importe quel point M appartenant à un plan et un point fixe A de ce même plan, le produit scalaire entre le vecteur normal et le vecteur $A\vec{M}$ est toujours nul:

$$\vec{n} \cdot A\vec{M} = 0$$

2.10. Vecteur normal et vecteurs orthogonaux

2.10.1 Définitions

2.10.1.1 Vecteur normal

Un vecteur $\overrightarrow{v}$ dit **normal** est un vecteur perpendiculaire à un plan.

2.10.1.2 Relation entre vecteur normal et équation cartésienne (IMPORTANT)

Plan	Si une droite a pour équation $ax + by + c = 0$, alors on peut lire directement les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$: $$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$ *Exemple : Pour la droite* $3x - 2y + 5 = 0$*, le vecteur* $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ *est normal à cette droite.*
Espace	Les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne sont exactement les coordonnées d'un **vecteur normal** $\vec{n}$ au plan. $$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$ Si on a l'équation $2x - 3y + z + 5 = 0$, on sait alors qu'un vecteur de coordonnées $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à ce plan.

Inversement, si on donne un vecteur normal à un plan dans l’espace dont l’équation cartésienne est à trouver, on a déjà les trois quarts de cette équation car il ne nous manque que la valeur de d !

Et pour trouver la valeur de d, il nous faut une information supplémentaire, au choix :

- **Un point** $A(x_A, y_A, z_A)$ **appartenant au plan :** C'est le cas le plus courant. On résout alors $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$.
- **La distance à l'origine :** Si on dit que le plan est à une distance H de l'origine $(0, 0, 0)$, on peut utiliser la formule de la distance d'un point à un plan.
- **Une condition de tangence :** Par exemple, si le plan est tangent à une sphère.

2.10.1.2 Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs sont dits **orthogonaux** si leur direction forme un angle droit ($90°$ ou $\pi/2$ radians). C'est l'équivalent de la "perpendicularité" mais étendue au monde des vecteurs (ce qui inclut le vecteur nul).

2.10.1.3 Particularités remarquables !

#1 : Attention de ne pas confondre "normal" et "orthogonal". On dit que deux vecteurs sont *orthogonaux*, mais on dit qu'un vecteur est *normal* à un plan. C'est juste une nuance de vocabulaire.

#2 : Par convention mathématique, le **vecteur nul** $\vec{0}$ est considéré comme orthogonal à **tous** les autres vecteurs de l'espace, car son produit scalaire avec n'importe quel vecteur est toujours égal à zéro.

2.10.2 Propriétés

Vecteur normal	**Produit Scalaire**	Pour n'importe quel point M du plan et un point fixe A du plan, le produit scalaire entre le vecteur normal et le vecteur $A\vec{M}$ est toujours nul : $\vec{n} \cdot A\vec{M} = 0$
	Unicité	Un plan possède une infinité de vecteurs normaux, mais ils sont tous colinéaires (ils pointent dans la même direction ou la direction opposée, avec des longueurs différentes).
	Équation cartésienne	Si un plan a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, alors un vecteur normal à ce plan a pour coordonnées directes :

		$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$
Vecteurs orthogonaux	**Produit de 2 vecteur $\perp$**	C'est la définition mathématique la plus utilisée. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur **produit scalaire est nul** : $$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$
	Dans le plan	Si $\vec{u}(x,y)$ est $\perp$ à $\vec{v}(x',y')$, alors $xx'+yy'=0$
	Dans l'espace	Si $\vec{u}(x,y,z)$ est $\perp$ à $\vec{v}(x',y',z')$, alors $xx'+yy'+zz'=0$

3. Résumé des formules à savoir

Définition et à qui ça sert	**Opération**	**Remarque sur le résultat du calcul**
Recomposition d'un vecteur selon Chasles On s'en sert pour regrouper les vecteurs et simplifier les équations mêlant plusieurs vecteurs.	$\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{BC}$ = $\overrightarrow{AC}$	Le résultat est un vecteur
Décomposition d'un vecteur selon **Chasles** On s'en sert pour décomposer une équation mêlant différent vecteur afin de faire apparaitre quelque chose de remarquable.	$\overrightarrow{AC}$ = $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{BC}$	Le résultat est une somme de vecteurs

Produit d'un **vecteur** par un **nombre** n (n $\in$ R est appelé "scalaire").	$\lambda.\overrightarrow{u}(x;y) = \overrightarrow{u}(\lambda.x;\lambda.y)$	Le résultat est un vecteur. Si le scalaire est négatif, le **vecteur résultat est dans le sens contraire.**
Produit scalaire : On s'en sert pour déterminer le sens d'un vecteur par rapport à l'autre : même sens, sens opposé ou orthogonal.	**Plan :** Si $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$ **Espace :** Si $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$	Le résultat est un **nombre** ! ● les 2 vecteurs vont dans le même sens $\Longrightarrow$ le nombre est positif. ● les 2 vecteur sont orthogonaux le nombre est NUL ($= 0$). ● les 2 vecteurs vont dans le sens opposé $\Longrightarrow$ le résultat est négatif Attention à ne pas confondre "nombre scalaire" et "produit scalaire".
Composante d'un vecteur. On s'en sert pour **déterminer les coordonnées** d'un vecteur dans un plan ou dans l'espace à partir des points des coordonnées des points de départ et d'arrivée qui le composent.	**Plan :** Si le vecteur $\vec{u}$ relie un point de départ $A(x_A, y_A)$ à un point d'arrivée $B(x_B, y_B)$, les composantes se calculent par la différence des coordonnées : $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ **Espace :** Si le vecteur $\vec{u}$ relie un point de départ $A(x_A, y_A, z_A)$ à un point d'arrivée $B(x_B, y_B, z_B)$, les composantes se calculent par la différence des coordonnées : $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$	Le résultat est un couple (plan) ou un triplet (espace) qui sont considérés comme les coordonnées du vecteur relativement à l'origine du repère dans lequel on travaille.
Déterminant de 2 ou 3 vecteurs. On s'en sert pour :	**Plan :** Pour deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et	Le résultat est un nombre. Dans le **plan** ce nombre représente

1. calculer une aire dans le plan ou un volume dans l'espace. 2. Démontrer que 2 vecteur du plan sont colinéaires ou non. 3. Démontrer que 3 vecteur de l'espace sont coplanaires ou non.	$\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, leur déterminant $\det(\vec{u},\vec{v})$ se calcule avec la règle du "produit en croix" : $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix} = x\cdot y' - y\cdot x'$ **Espace :** Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$. On calcul le déterminant de ces 3 vecteurs comme ceci : $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix}x & x' & x''\\y & y' & y''\\z & z' & z''\end{vmatrix} =$ $x\begin{vmatrix}y' & y''\\z' & z''\end{vmatrix} - y\begin{vmatrix}x' & x''\\z' & z''\end{vmatrix} + z\begin{vmatrix}x' & x''\\y' & y''\end{vmatrix}$	**l'aire** de la figure définie par les 2 vecteurs. Dans **l'espace** ce nombre représente le **volume** de la figure définie par les 3 vecteurs. On utilise le **calcul du déterminant** pour **démontrer que** 2 vecteurs (resp. 3) sont colinéaires (resp. coplanaires). Dans ce cas, le déterminant sera nul. Sinon ce sera un nombre > 0, représentant l'aires (resp. le volume).
Norme d'un vecteur. On s'en sert pour calculer la longueur d'un vecteur	**Plan :** Si $\vec{u}(x,y)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ **Espace :** Si $\vec{u}(x,y,z)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$	Ce nombre sera toujours positif (ou nul pour le vecteur nul). Remarque : la norme au carré d'un vecteur est égale au produit scalaire de ce vecteur par lui même : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$
Calculer l'**angle entre 2 vecteurs**.	**Plan et Espace :** $\cos(\theta) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$	Cette formule est valable dans le plan et dans l'espace !
Equation cartésienne	**Dans un plan, l'équation cartésienne d'une droite est**	

	$ax + by + c = 0$ **Dans l'espace, l'équation cartésienne d'un plan est** $ax + by + cz + d = 0$	
Vecteur normal	**Plan :** Le vecteur normal à une droite D du plan, ayant pour équation $ax + by + c = 0$ a pour coordonnées $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ **Espace :** **Le vecteur normal à un plan P de l'espace, ayant pour équation** $2x - 3y + z + 5 = 0$ **a pour coordonnées** $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$	Aucun calcul : lecture directe des coordonnées du vecteur normal à partir de l'équation cartésienne de D ou P. Attention à ne pas confondre "vecteur normal" et "norme d'un vecteur". De même, on dit que un vecteur est "normal" a un plan, et que 2 vecteurs sont "orthogonaux" entre eux ; c'est la même notion de "perpendicularité". Mais on ne dit pas qu'un vecteur est orthogonal à un plan !