Solution des exercices

Exercice #1

1. Calcul des coordonnées des vecteurs

Dans un repère orthonormé (O,i,j), les coordonnées d'un vecteur XY sont données par :

$XY=(x_Y-x_X,y_Y-y_X)$

- $AB=(4-1,2-2)=(3,0)$
- $BC=(4-4,5-2)=(0,3)$
- $CD=(1-4,5-5)=(-3,0)$
- $DA=(1-1,2-5)=(0,-3)$
- $AC=(4-1,5-2)=(3,3)$
- $BD=(1-4,5-2)=(-3,3)$

---

2. Vérification de la colinéarité

Deux vecteurs $u(x,y)$ et $v(x',y')$ sont colinéaires si et seulement si :

$x\cdot y'-y\cdot x'=0$

- AB et DC : $DC=-CD=(3,0)$. On vérifie :

$3\cdot 0-0\cdot 3=0(\text{Coline\'aires})$

- AD et BC : $AD=-DA=(0,3)$. On vérifie :

$0\cdot 3-3\cdot 0=0(\text{Coline\'aires})$

Conclusion : Les côtés opposés AB et DC , ainsi que AD et BC , sont colinéaires. Cela signifie que ABCD est un parallélogramme.

---

3. Vérification de l'orthogonalité

Deux vecteurs $u(x,y)$ et $v(x',y')$ sont orthogonaux si et seulement si :

$x\cdot x'+y\cdot y'=0$

- AB et AD : AD=(0,3) . On vérifie :

$3 \cdot 0+0 \cdot 3=0$(Orthogonaux)

- AC et BD : On vérifie :

$3 \cdot (-3)+3 \cdot 3=-9+9=0$(Orthogonaux)

Conclusion :

- AB et AD sont orthogonaux, donc l'angle BAD est un angle droit.
- Les diagonales AC et BD sont orthogonales, ce qui est une propriété des losanges ou des carrés.

---

4. Calcul des normes

La norme d'un vecteur u(x,y) est donnée par :

// u // =x2+y2

- // AB // =32+02=9=3
- // AD // =02+32=9=3

Conclusion : Les vecteurs AB et AD ont la même norme (3), donc les côtés adjacents [AB] et [AD] sont de même longueur.

---

5. Nature du quadrilatère ABCD

- Parallélogramme : Les côtés opposés sont parallèles et égaux (colinéarité de AB et DC , AD et BC).
- Angle droit : AB et AD sont orthogonaux, donc ABCD est un rectangle.
- Côtés égaux : // AB // = // AD // =3 , donc ABCD est un carré (rectangle avec côtés égaux).
- Diagonales orthogonales : AC et BD sont orthogonaux, ce qui confirme que ABCD est un carré.

Réponse finale : Le quadrilatère ABCD est un carré, car c'est un parallélogramme avec :

1. Un angle droit ($AB \perp AD$),
2. Des côtés adjacents de même longueur (// AB // = // AD //),
3. Des diagonales orthogonales ($AC \perp BD$).

Exercice 2

Partie 1 : Vecteurs et colinéarité

1. Coordonnées des vecteurs :

AB=(4−1,3−2)=(3,1) AC=(2−1,5−2)=(1,3) BC=(2−4,5−3)=(−2,2)

2. Colinéarité de AB et AC :

3×3−1×1=9−1=8=0(Non coline´aires)

3. Normes des vecteurs :

∥ AB ∥ =32+12=10 ∥ AC ∥ =12+32=10 ∥ BC ∥ =(−2)2+22=8=22

Partie 2 : Trigonométrie dans le triangle ABC

4. Calcul de l'angle BAC : Le produit scalaire donne :

AB⋅AC=3×1+1×3=6 cos(BAC)= ∥ AB ∥ × ∥ AC ∥ AB⋅AC=10×106=106=0,6
BAC=arccos(0,6)≈53,13∘

5. Aire du triangle ABC :

sin(BAC)=1−cos2(BAC)=1−0,36=0,8 Aire=21×10×10×0,8=21×10×0,8=4

6. Aire par la formule du déterminant :

Aire=21∣1(3−5)+4(5−2)+2(2−3)∣=21∣−2+12−2∣=21×8=4

Les deux méthodes donnent le même résultat.

Partie 3 : Théorème d'Al-Kashi et loi des sinus

7. Théorème d'Al-Kashi (loi des cosinus) :

BC2=AB2+AC2−2×AB×AC×cos(BAC) BC2=10+10−2×10×10×0,6=20−12=8
BC=8=22(Cohe´rent avec la norme ∥ BC ∥)

8. Loi des sinus :

$\sin(BAC)BC=\sin(ACB)AB=\sin(ABC)AC$ $0,822=\sin(ACB)10=\sin(ABC)10$
$0,822=252$(Simplification) $\sin(ACB)=\sin(ABC)=5210\times2=525\approx0,894$
$ACB=ABC=\arcsin(0,894)\approx63,43^\circ$

Vérification :

$BAC+ABC+ACB\approx53,13^\circ+63,43^\circ+63,43^\circ=180^\circ$

Bilan

- Vecteurs : Calculs de coordonnées, colinéarité, normes.
- Trigonométrie : Produit scalaire, aire, théorème d'Al-Kashi, loi des sinus.
- Géométrie : Vérification des résultats par différentes méthodes.

Variante possible :

- Demander de calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC .
- Vérifier que G est bien le barycentre des points A,B,C avec des coefficients égaux.