Fonctions Homographiques et Rationnelles

1. Forme générale

Ces 2 types de fonctions sont de la forme $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Toutefois :

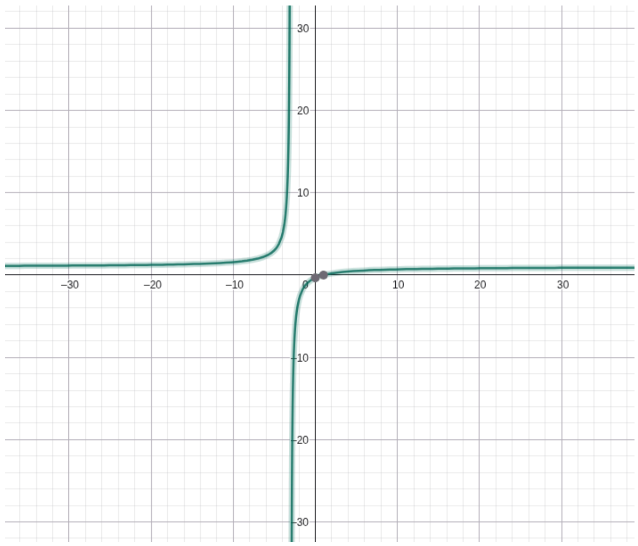
- Une **fonction** est dite **homographique** si P(x) et Q(x) sont tous les 2 des polynômes de degré 1.
- Toute autre fonction dont $P(x)$ et/ou $Q(x)$ serait de degré > 1 serait alors dite **fonction rationnelle**.

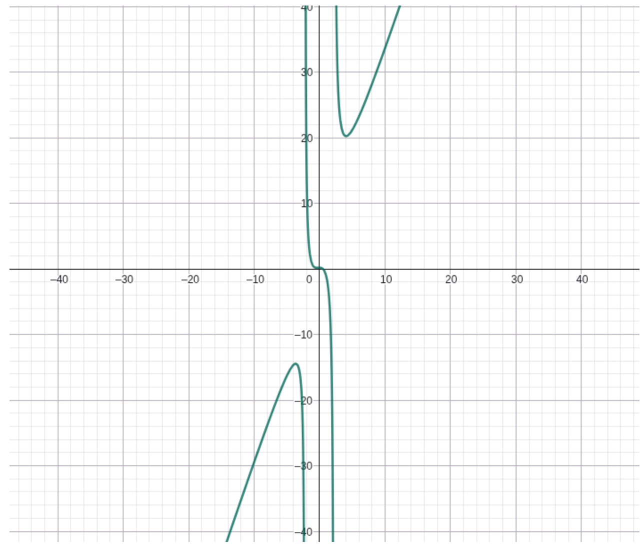
De plus visuellement ces 2 types de fonctions ont des allures différentes :

Caractéristique	Fonction Homographique	Fonction Rationnelle (Degré 2/1)
Structure	$\frac{\text{Degré 1}}{\text{Degré 1}}$	$\frac{\text{Degré 2}}{\text{Degré 1}}$
Asymptote Horizontale	✅ Oui	❌ Non
Asymptote Oblique	❌ Non	✅ Oui
Allure du graphique	Une hyperbole simple	Des courbes qui "suivent" une droite penchée

Exemples :

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$	$f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 3}$





On reviendra sur ces notions d'asymptote un peu plus loin.

2. Domaine de définition

Pour ce type de fonction, il convient de vérifier que $Q(x)$ ne soit pas égal à 0. On va donc résoudre l'équation $Q(x) = 0$ pour exclure du domaine de définition les valeurs qui remplissent ces conditions.

Exemple si $f(x) = \dfrac{(2x^2 - 3x + 1)}{x^2 - 4}$ alors $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

Cf. aussi exemple au § 4.2 ci-après.

3. Opération sur les fractions rationelles

3.1 Simplification

Pour simplifier $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, il faut identifier dans p(x) et q(x) un facteur commun en factorisant.

Cf. exemple au § 4.1 et 4.3 ci-après.

3.2 Multiplication et Division

Pour multiplier entre elles 2 fractions rationnelles, on multiplie les numérateur entre eux et les dénominateurs entre eux. On essaie autant que possible de “ne pas distribuer” les termes, en les gardant factorisés. il peut arriver que des termes communs apparaissent sur le numérateur et le dénominateur, on peut alors simplifier en n’oubliant pas d’exclure du domaine de définition les valeurs pour lesquelles Q(x) = 0.

Exemple :

$\frac{x^2-6x+9}{x^2-1} \times \frac{-4x+4}{3-x}$ nous donne après calculs $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\}$ et $\frac{4(x-3)}{x+1}$

Diviser deux fractions rationnelles A par B revient à multiplier A par l’inverse de B.

3.3 Additions et Soustraction

Comme pour les nombres rationnels, on va d’abord identifier un dénominateur commun aux termes à additionner ou à soustraire. Pour chaque fraction à additionner ou soustraire, on multipliera alors le numérateur et le dénominateur par le complément au facteur commun.

Exemple :

$$\frac{x-1}{2x+5} - \frac{2-x}{2x+3}$$

Le dénominateur commun est $(2x+5)(2x+3)$. On va donc multiplier en haut et en bas le premier terme par $(2x+3)$ et le second terme terme par $(2x+5)$.

On obtient alors $\frac{(x-1)(2x+3)-(2-x)(2x+5)}{(2x+5)(2x+3)}$

Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right\}$

Et après développement, simplification et regroupement du numérateur on obtient ceci :

$$\frac{4x^2+2x-13}{(2x+5)(2x+3)}$$

4. Résoudre les équations rationnelles

Pour résoudre une équation rationnelle, procéder comme suit :

• Préciser l'ensemble de définition en factorisant tous les dénominateurs.
• Ecrire l'équation simplifiée et factoriser au maximum sous la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$
• Puisque on veut résoudre $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, on peut considérer que ceci sera vrai si et seulement si $P(x) = 0$. On va donc trouver les valeurs pour lesquelles $P(x) = 0$
• Les solutions sont celles pour lesquelles $P(x) = 0$ mais SANS LES VALEURS exclues de l'ensemble de définition du point 1. !!!

5. Résoudre les inéquations rationnelles

Pour résoudre une inéquation rationnelle, procéder comme suit :

• Préciser l'ensemble de définition en factorisant tous les dénominateurs.
• Écrire l'inéquation simplifiée et factoriser au maximum sous la forme $\frac{P(x)}{Q(x)} \#\# 0$ (ou … est <, >, <= ou >=) avec un $P(x)$ factorisé au MAXIMUM.
• Étudier le signe de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dans un tableau de signe., retenir les solution pour lesquelles "... 0".
• Les solutions sont celles pour lesquelles $P(x) = 0$ mais SANS LES VALEURS exclues de l'ensemble de définition du point 1. !!!

Exemple : Résoudre $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 2x^2 - x - 2} > 0$

Après factorisation des numérateurs et dénominateur, l'expression devient

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x+2)} > 0$$

et donc $S =]-2; -1[\cup]1; 2[\cup]3; +\infty[$ après étude du signe de chaque terme dans un tableau.

La suite est Hors Programme, mais utile pour plus tard …

6. Exemple Etude de fonction Rationnelle

Etude de la fonction $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 - 19x^2 - 32x + 48}{x^3 - 2x^2 - 19x + 20}$

6.1. Simplification de l'expression

On remarque que l'on peut simplifier (ce qui ne sera pas toujours le cas) en ré-écrivant le numérateur et le dénominateur sous leur forme factorisée :

- **Numérateur :** $(x-1)(x-4)(x+4)(x+3)$
- **Dénominateur :** $(x-1)(x-5)(x+4)$

L'expression devient alors $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-4)(x+4)(x+3)}{(x-1)(x-5)(x+4)}$

6.2. Domaine de définition

La fonction est définie si le dénominateur est non nul. Les valeurs interdites sont donc les racines du polynôme figurant au dénominateur :

- $x - 1 \neq 0 \implies x \neq 1$
- $x - 5 \neq 0 \implies x \neq 5$
- $x + 4 \neq 0 \implies x \neq -4$

Le domaine de définition est donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1, 5\}$.

6.3. Simplification et continuité

On peut simplifier par $(x-1)$ et $(x+4)$ pour tout x appartenant à D_f. La fonction simplifiée s'écrit alors $g(x) = \dfrac{(x-4)(x+3)}{x-5} = \dfrac{x^2 - x - 12}{x-5}$

- Aux points $x = 1$ et $x = -4$, la fonction présente des **"trous" (discontinuités éliminables (cf. (5.))** car les facteurs s'annulent au numérateur et au dénominateur.
- Au point $x = 5$, le numérateur ne s'annule pas ($5^2 - 5 - 12 = 8$). Il y a donc une **asymptote verticale** d'équation $x = 5$.

6.4. Asymptotes

- Asymptote Verticale : $x = 5$.

- Asymptote Oblique : Puisque le degré du numérateur de $g(x)$ est supérieur d'une unité à celui du dénominateur, effectuons la division euclidienne :
  $x^2 - x - 12 = (x-5)(x+4) + 8 \implies g(x) = x + 4 + \dfrac{8}{x-5}$
  L'asymptote oblique a pour équation $y = x + 4$.

6.5. Points particuliers

- **Intersections avec l'axe des abscisses (zéros) :** $g(x) = 0$ quand le numérateur s'annule, soit pour $x = 4$ et $x = -3$.
- **Intersection avec l'axe des ordonnées :** $f(0) = \dfrac{48}{20} = \dfrac{12}{5}$.

6.6. Calcul de la dérivée et obtention du tableau de variation

Nous utilisons la formule du quotient $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

- $u(x) = x^2 - x - 12 \implies u'(x) = 2x - 1$
- $v(x) = x - 5 \implies v'(x) = 1$

6.7. Calcul de $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{(2x-1)(x-5) - (x^2 - x - 12)(1)}{(x-5)^2}$$

Développons le numérateur :

- $(2x-1)(x-5) = 2x^2 - 10x - x + 5 = 2x^2 - 11x + 5$
- En soustrayant le reste :
  $(2x^2 - 11x + 5) - (x^2 - x - 12) = 2x^2 - 11x + 5 - x^2 + x + 12$

On obtient la dérivée $g'(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 17}{(x-5)^2}$

6.8. Recherche des points critiques (extremums)

La dérivée s'annule quand son numérateur est nul : $x^2 - 10x + 17 = 0$.

Utilisons le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(17) = 100 - 68 = 32$

Les racines sont :

- $x_1 = \dfrac{10 - \sqrt{32}}{2} = \dfrac{10 - 4\sqrt{2}}{2} = 5 - 2\sqrt{2} \approx 2,17$

- $x_2 = \frac{10+\sqrt{32}}{2} = \frac{10+4\sqrt{2}}{2} = 5+2\sqrt{2} \approx 7,83$

6.9. Tableau de variations

Le dénominateur $(x-5)^2$ est toujours positif.

Le signe de $g'(x)$ dépend donc uniquement du trinôme $x^2-10x+17$ (positif à l'extérieur des racines).

On peut maintenant établir le tableau de variations :

x	$-\infty$	$5-2\sqrt{2}$	5	$5+2\sqrt{2}$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Variations de $g(x)$	Croissant ↗	**Max local**	**		**

6.10. Calcul des ordonnées des extremums

Nous utilisons la forme simplifiée $g(x) = \frac{x^2-x-12}{x-5}$.

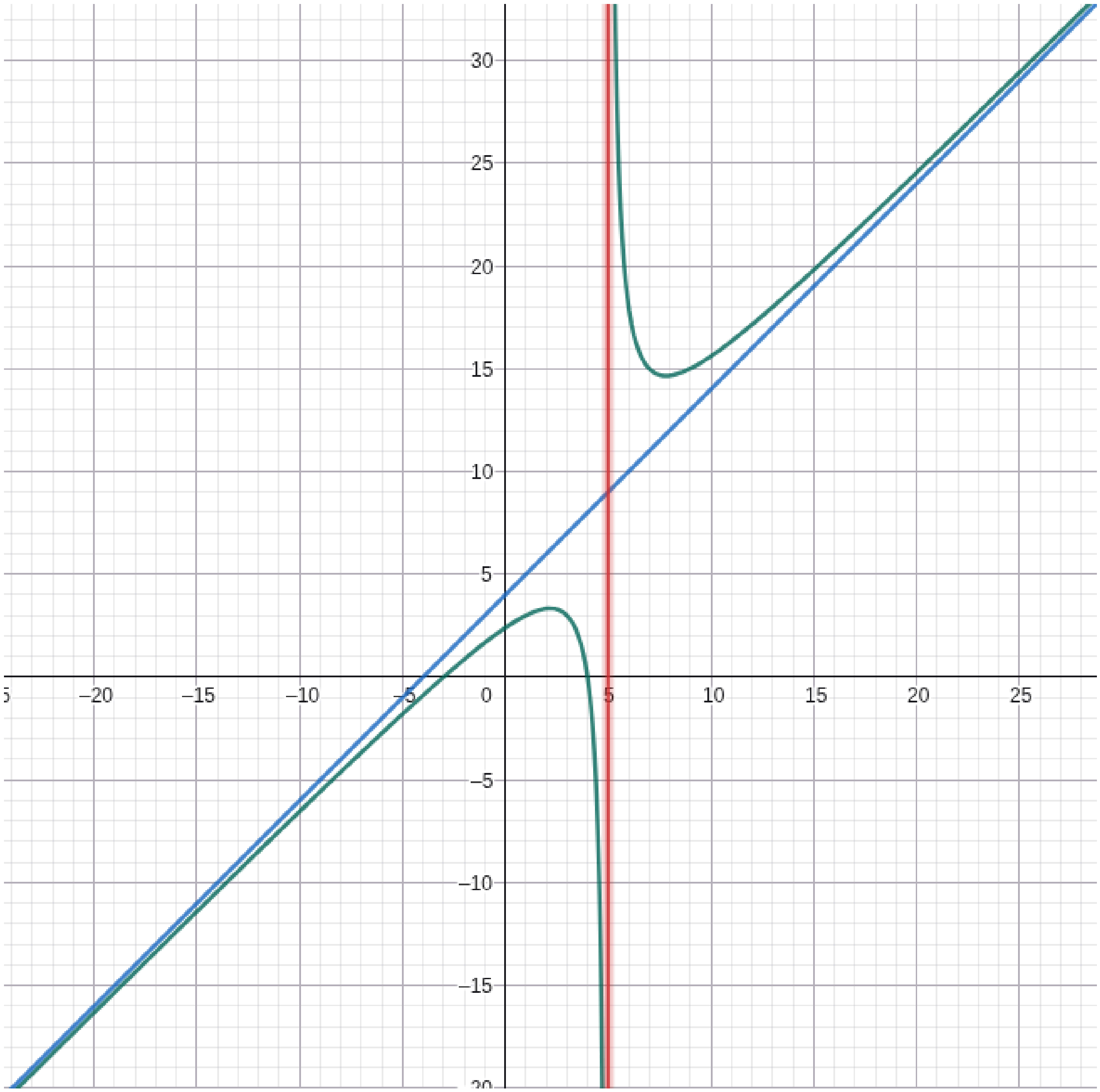
Une astuce pour simplifier le calcul est d'utiliser l'asymptote oblique $g(x) = x+4+\frac{8}{x-5}$ trouvée précédemment.

- Pour le maximum local ($x_1 = 5-2\sqrt{2}$) :
  $g(5-2\sqrt{2}) = (5-2\sqrt{2}+4) + \frac{8}{(5-2\sqrt{2})-5}$
  $= 9-2\sqrt{2} + \frac{8}{-2\sqrt{2}} = 9-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}$
  $y_{max} = 9-4\sqrt{2} \approx 3,34$
- Pour le minimum local ($x_2 = 5+2\sqrt{2}$) :
  $g(5+2\sqrt{2}) = (5+2\sqrt{2}+4) + \frac{8}{(5+2\sqrt{2})-5}$
  $= 9+2\sqrt{2} + \frac{8}{2\sqrt{2}} = 9+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}$
  $y_{min} = 9+4\sqrt{2} \approx 14,66$

6.11. Synthèse pour le tracé de la courbe

Élément	Caractéristique
Domaine	$\mathbb{R} \setminus \{-4, 1, 5\}$
Trous (Points vides)	$(-4; 0,89)$ et $(1; 3)$
Zéros	$x = -3$ et $x = 4$
Asymptote Verticale	$x = 5$
Asymptote Oblique	$y = x + 4$
Maximum local	$\approx (2,17; 3,34)$
Minimum local	$\approx (7,83; 14,66)$

6.12. Courbe de f



7. Les Asymptotes (Le comportement à l'infini)

Déterminer les asymptotes permet d’avoir une idée de la courbe pour certaines valeurs limites :

- D’une part, comment se comporte quand x devient très grand ($+\infty$) ou très petit ($-\infty$) ?
- D’autre part on cherche aussi à connaître son comportement aux points de rupture de la Courbe, c'est-à-dire au(x) point(s) qui ne font pas partie du domaine de définition. Par exemple, pour reprendre l’exemple précédent, on essaye de déterminer le

comportement de la courbe lors x tend vers 2_{-} et vers 2_{+}, ainsi que -2_{-} et -2_{+}, car il ne peut jamais atteindre les valeurs 2 et -2 qui sont exclues du domaine de définition.

Il existe trois cas classiques selon les degrés des polynômes :

Comparaison des degrés	Type d'asymptote	Explication simple
Degré $P <$ **Degré** Q	Horizontale en $y = 0$	Le dénominateur est "plus fort", la fonction tend vers 0.
Degré $P =$ **Degré** Q	Horizontale en $y = k$	La limite est le rapport des coefficients des plus hauts degrés.
Degré $P =$ **Degré** $Q + 1$	**Oblique**	La fonction finit par suivre une droite penchée.

Exemple avec $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4}$:

a) Asymptote verticale

Les asymptotes verticales se trouvent généralement là où le dénominateur s'annule (si le numérateur ne s'annule pas en même temps pour simplifier la fraction).

- **En** $x = 2$ **:** Le numérateur vaut $2(2)^2 - 3(2) + 1 = 3$. Comme le dénominateur tend vers 0 et le numérateur vers 3, la limite est infinie.
- **En** $x = -2$ **:** Le numérateur vaut $2(-2)^2 - 3(-2) + 1 = 15$. De même, la limite est infinie.

Conclusion nous avons 2 asymptotes verticales d'équation en -2 et 2.

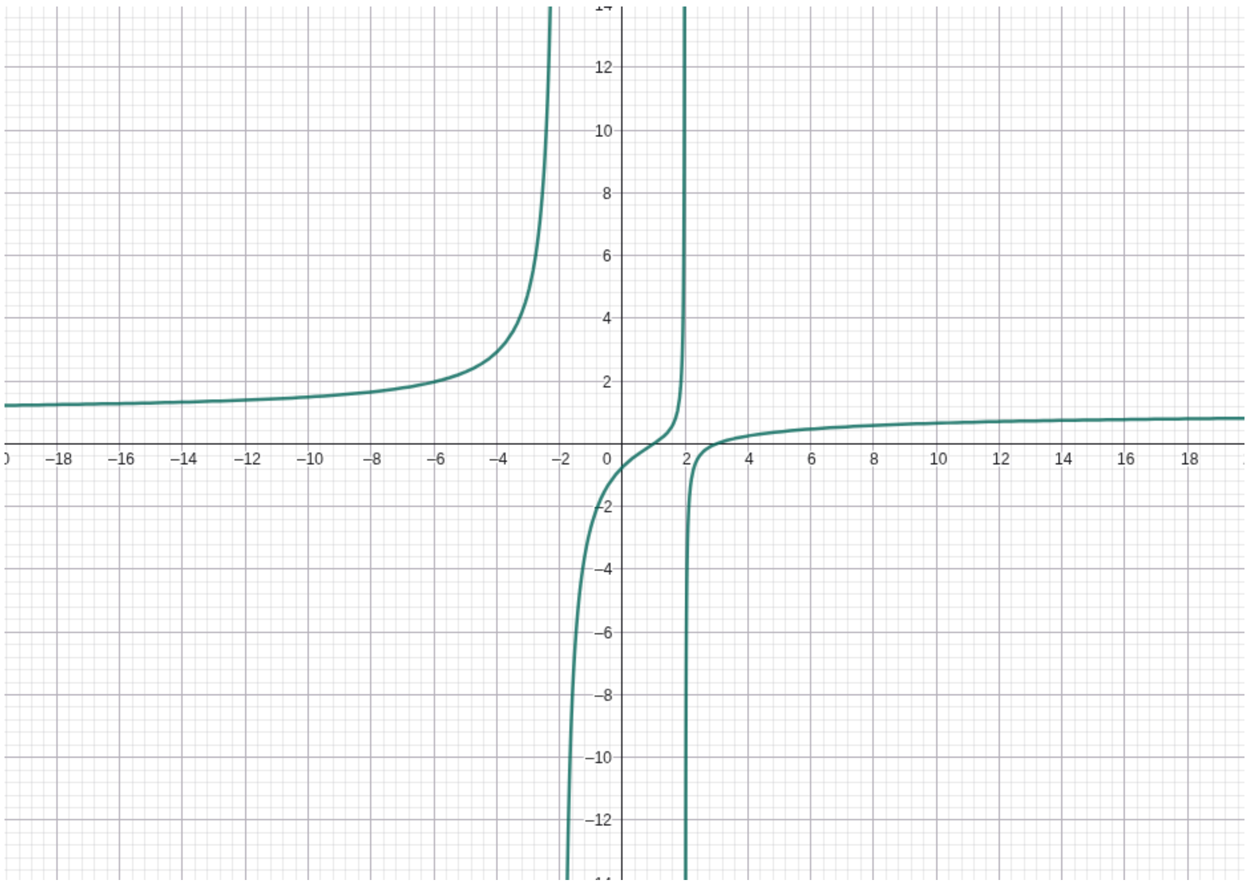
b) Asymptote horizontale

Pour trouver l'asymptote horizontale, on calcule la limite de $f(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$. Pour une fonction rationnelle, cela revient à regarder le rapport des termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Conclusion : Il y a une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

Ce qui donne visuellement :



8. discontinuités éliminables

Une discontinuité éliminable (parfois appelée discontinuité apparente ou "trou") est un point où une fonction n'est pas définie, mais où elle possède une limite finie.

Contrairement à une asymptote verticale où la fonction "s'envole" vers l'infini, la courbe semble parfaitement continue, à l'exception d'un seul point manquant.

8.1. Pourquoi est-elle "éliminable" ?

On dit qu'elle est éliminable car on peut "réparer" la fonction en lui donnant une valeur spécifique à cet endroit précis. Mathématiquement, cela se produit lorsque :

1. La limite à gauche et la limite à droite en un point a existent et sont égales (soit L).
2. Mais la fonction $f(a)$ n'est pas définie (ou $f(a) \neq L$).

8.2. Le cas des fonctions rationnelles

Dans le cas des fractions (comme l'exercice précédent), une discontinuité éliminable apparaît quand un facteur est présent à la fois au numérateur et au dénominateur et qu'il s'annule pour la même valeur de x.

Exemple concret :

Soit $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}$.

- Ici, $x = 1$ est une valeur interdite (on ne peut pas diviser par zéro).
- Cependant, si on simplifie par $(x-1)$, on obtient $f(x) = x + 3$.
- La limite quand x tend vers 1 est $1 + 3 = 4$.
- Sur le graphique, vous verrez la droite $y = x + 3$, mais avec un petit cercle vide au point $(1; 4)$.

Type de point	Ce qui se passe au dénominateur	Allure sur le graphique
Discontinuité éliminable	Le facteur s'annule aussi au numérateur (on peut simplifier).	Un **trou** (point vide) dans la courbe.
Asymptote verticale	Le facteur ne s'annule QUE au dénominateur.	La courbe monte ou descend vers l'**infini**.