

La Trigonométrie

1- Rappels

Dans un triangle ABC, rectangle en A, pour les 2 angles $\alpha = \widehat{ABC}$ et $\beta = \widehat{BCA}$:

$$\sin(\alpha) = \cos(\beta) = \frac{AC}{BC}, \quad \cos(\alpha) = \sin(\beta) = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{AC}{AB} \text{ et } \tan(\beta) = \frac{AB}{AC}, \text{ donc } \tan(\beta) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

2- Transformation Degré / Radian / Grades

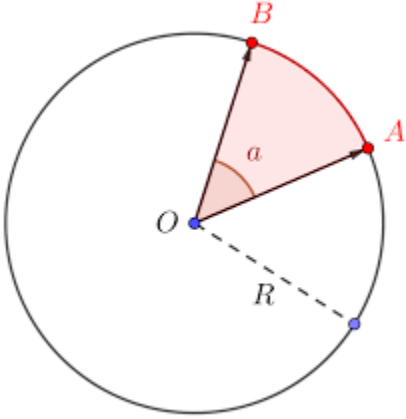
Angle	Degrés (°)	Radians (rad)	Grades (gr)
Angle nul	0°	0	0 gr
Angle aigu	45°	$\frac{\pi}{4}$	50 gr
Angle droit	90°	$\frac{\pi}{2}$	100 gr
Angle plat	180°	π	200 gr

Cercle complet	360°	2π	400 gr
----------------	------	--------	--------

Nota : Pour convertir les degrés x en radian y et réciproquement :

$$\frac{x}{180} = \frac{y}{\pi}$$

3- Aire du secteur

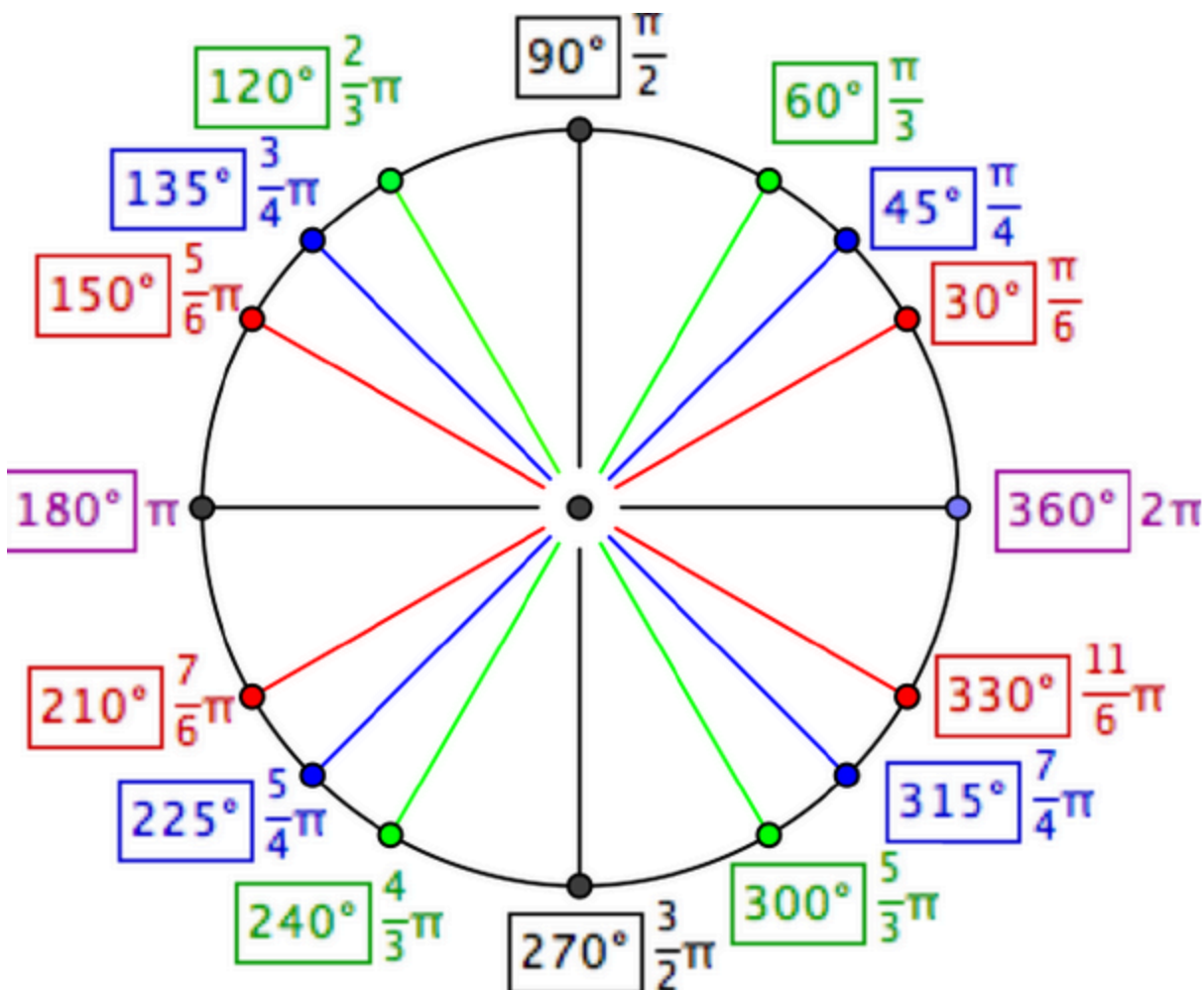
	L'aire du secteur AOB d'angle α a pour valeur : En Degrès : $\frac{\pi \cdot \alpha \cdot R^2}{360}$ En Radians : $\frac{\alpha_{rad} \cdot R^2}{2}$ La longueur de l'arc AB est : $R \cdot \alpha_{rad}$
--	--

4- Pourquoi le cercle trigonométrique ?

- **Visualisation:** Il offre une représentation graphique intuitive des fonctions sinus et cosinus.
- **Calculs rapides:** Pour les angles remarquables, les valeurs peuvent être lues directement.
- **Compréhension des propriétés:** Il permet de mieux comprendre les propriétés des fonctions trigonométriques (parité, périodicité, etc.).

Le cercle trigonométrique est un outil indispensable pour comprendre et utiliser les fonctions sinus et cosinus. Il permet de passer d'une représentation géométrique à une représentation numérique, et vice versa.

3- Le cercle trigonométrique exprimé en Radians et Degrés



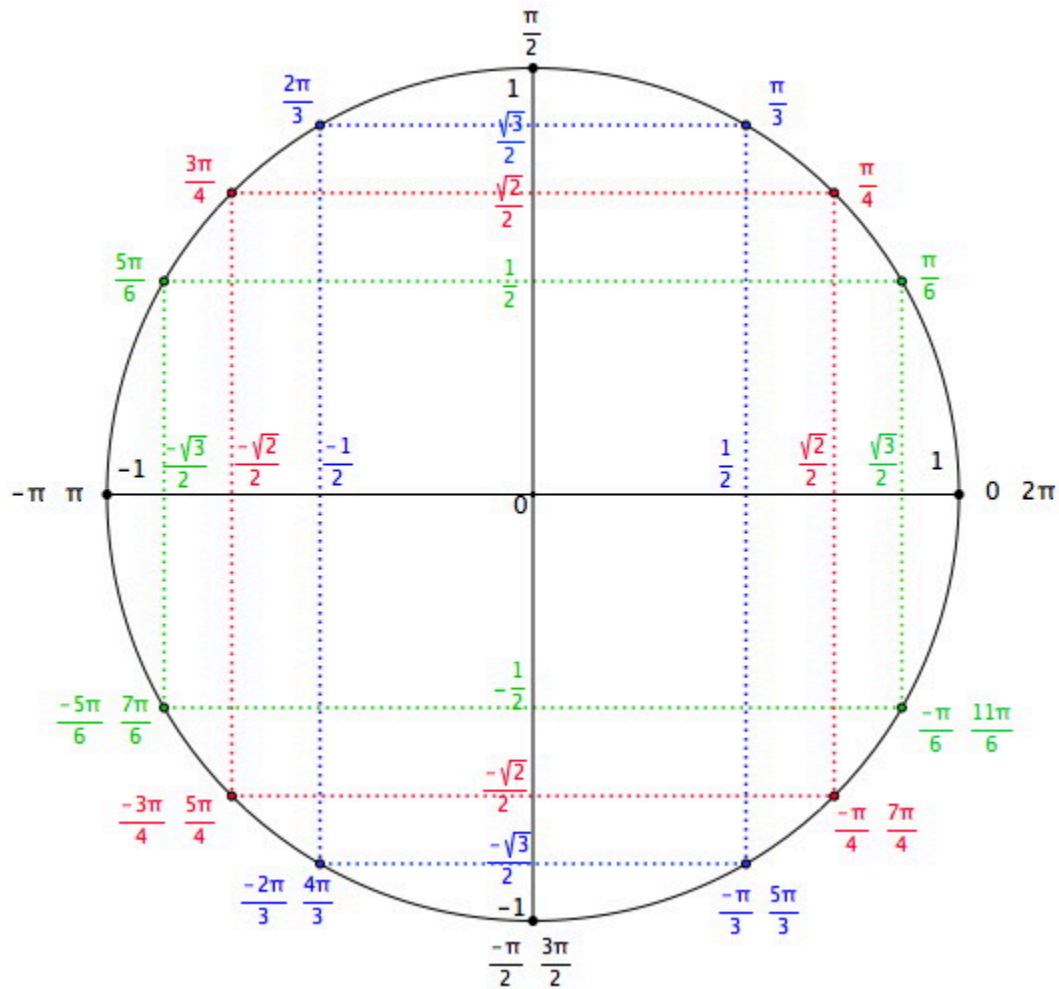
5- Retenir facilement le premier quadrat

Angle (Rad)	0	$\pi / 6$	$\pi / 4$	$\pi / 3$	$\pi / 2$
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$

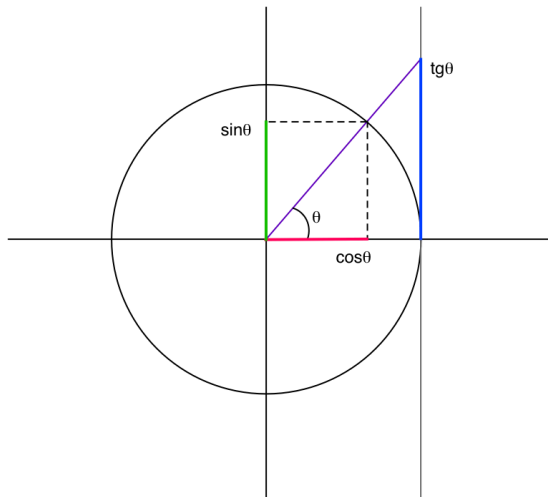
Nota : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

6- Les valeurs des Cosinus et Sinus dans le cercle Trigo

Sur un cercle UNITAIRE (de rayon = 1), on peut donc déduire les valeurs de Sinus et Cosinus des principaux angles exprimés en radian, par application du théorème de pythagore.



7. Définition de la tangente d'un angle



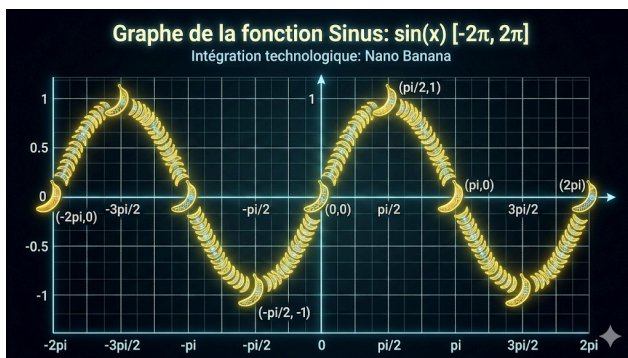
$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \text{ quel que soit } \alpha$$

$$\text{et } \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$$

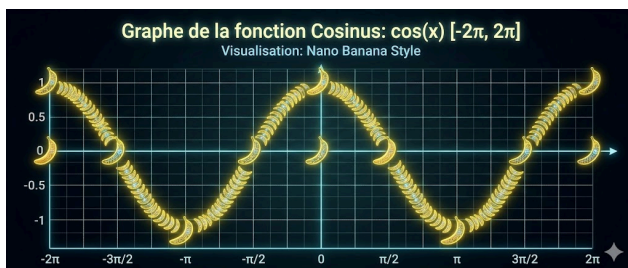
Nota : définition de la co-tangente : c'est l'inverse de la tangente ...

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

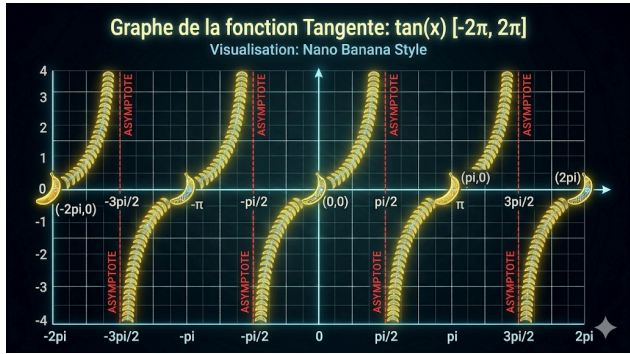
8- Courbes des fonctions sinus, cosinus et tangente



- Quel que soit x , $\sin(x)$ est toujours compris entre -1 et 1.
- Périodicité : 2π
- Passe par le point $(0;0)$ ($\sin(0) = 0$)

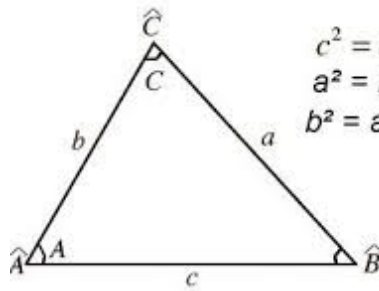


- Quel que soit x , $\cos(x)$ est toujours compris entre -1 et 1.
- Périodicité : 2π
- Passe par le point $(0;1)$ ($\cos(0) = 1$)
- Est déphasé de $\pi/2$ pour rapport à la courbe de $\sin(x)$



- Périodicité : π

9- Théorèmes applicables aux triangles quelconques



$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \end{aligned}$$

Théorème du Cosinus (Al-Khasi) :

Théorème du Sinus : $\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$

Théorème de l'Aire : $\text{Aire} = \frac{a.b.\sin(\hat{C})}{2} = \frac{a.c.\sin(\hat{B})}{2} = \frac{b.c.\sin(\hat{A})}{2}$

8- Propriétés

8.1 Pythagore

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

8.2 Ajout et retrait d'angles

x	-x	$\pi + x$	$\pi - x$	$\pi/2 + x$	$\pi/2 - x$	$x + 2k\pi$ (*)
cos	cos	-cos	-cos	-sin	sin	cos

sin	-sin	-sin	sin	cos	cos	sin
-----	------	------	-----	-----	-----	-----

(*) : $(x + 2k\pi)$ exprime la périodicité de 2π des fonctions Sin et Cos, quel que soit x appartenant à $\mathbb{N}$.

Exemple de lecture de ce tableau : $\cos x = -\cos(\pi - x)$

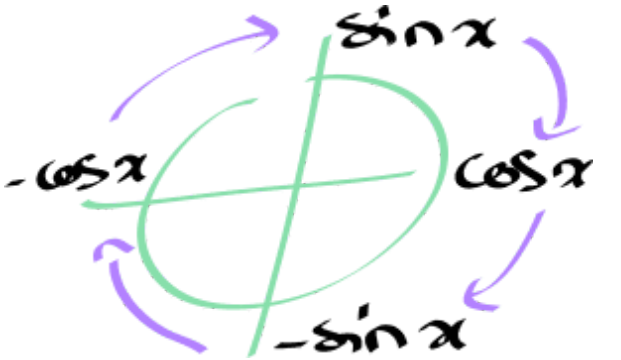
8.3 Formules usuelles

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Moyen mnémotechnique, retient ce qui suit :

- Le **cosinus** est un **connard** (raciste et menteur, il ne se mélange pas avec le sinus et il inverse les signes) et le **sinus** il est **sympa** (sociable, il se mélange avec le cosinus)
- la phrase "coco sisi, sico cosi"

9- Complément : Dérivée et Intégrale

	Astuce : Tourner vers la DROITE pour DÉRIVER. Et donc vers la GAUCHE pour PRIMITIVER (ou INTEGRER). Ainsi, par exemple : • $(\sin x)' = \cos x$ • $\int \sin x = -\cos x$
---	---

A noter, pour une intégration par partie, la Trigonométrie intervient en dernier dans la règle du LPET :

- Logarithme
- Polynôme
- Exponentielle
- Trigonométrie

Cf. chapitre sur le calcul des intégrales

10 - Exemples de résolution d'équation

Exemple #1 : Résoudre $\cos x = \sqrt{3}/2$ sur l'intervalle $[0;2\pi[$

Bien sûr, nous savons en lecture directe dans le tableau que $\cos \pi / 6 = \sqrt{3}/2$, donc $\pi / 6$ est une première solution. Mais ATTENTION, on nous demande les solutions sur l'intervalle $[0;2\pi[$, c'est-à-dire dans les 4 cadrans du cercle trigonométrique.

Où nous savons aussi que dans ce cercle, $\cos(x) = \cos(-x)$

Donc $-\pi / 6$ serait solution mais cette valeur d'angle n'appartient pas à l'intervalle $[0;2\pi[$!

En revanche $-\pi / 6$ serait dans le cadran BG, et donc en ajoutant 2π à cette valeur on retrouve $2\pi - \pi / 6 = 11 \pi / 6$

Or $11 \pi / 6$ appartient aussi à l'intervalle $[0;2\pi[$

Par conséquent $S = \{ \pi / 6 ; 11\pi / 6 \}$

Cet exercice permet d'illustrer la périodicité de la fonction Cos (tout comme Sin) et le fait que pour une valeur donnée dans le cercle trigo, il existe toujours 2 angles possibles : Il faut trouver ces 2 angles dans l'intervalle donné si celui ci couvre 1 période complète ($[0;2\pi[$ est bien une période complète de 2π !)

Exemple #2 : Résoudre $\sin x = \sqrt{2}/2$ sur l'intervalle $[0;2\pi[$

$$S = \{ \pi / 4 ; 3\pi / 4 \}$$

Exemple #3 : Simplifier $\sin(x+\pi/2) - 2\cos(-x-\pi) + 5\sin(-x)$

Nous savons que :

- $\sin(x+\pi/2) = \cos(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ donc $\cos(-x-\pi) = \cos(x+\pi)$ et $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$

$$\text{donc } \sin(x+\pi/2) - 2.\cos(-x-\pi) + 5.\sin(-x) = \cos(x) - 2.-\cos(x) - 5.\sin(x) = 3.\cos(x) - 5.\sin(x)$$