

Tableaux de signes et esquisses de courbe pour les polynôme de degré n

1- Rôle et utilité d'un tableau de signe

Passer d'un tableau de signes à une esquisse de courbe est une excellente méthode pour visualiser une fonction polynomiale. C'est un peu comme relier des points stratégiques pour voir apparaître le "squelette" de la fonction.

Notons que tout ce qui est évoqué ci-après demeure valable quel que soit le degré du polynôme.

2- Etape clés

Les étapes clés citées ci-après seront reprises en détail une à une dans les paragraphes suivants pour in fine donner une esquisse du profil de courbe.

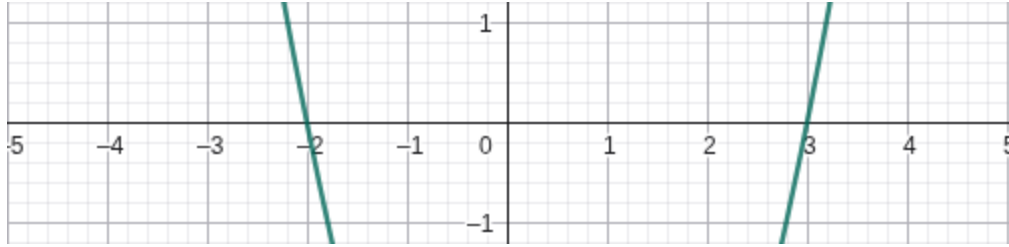
- Trouver les racines (les points sur l'axe des abscisses).
- l'ordonnée à l'origine.
- rôle de a , le coefficient d'orientation de la courbe.
- Établir le tableau de signes.
- Esquisser la courbe par étapes :
 - Marquez les **racines** sur l'axe x .
 - Placez le point $f(0)$ sur l'axe y .
 - Regardez le signe de a pour savoir si vous finissez en haut ou en bas à droite.
 - Tracez une courbe fluide qui passe par vos points en restant dans les zones "autorisées" par votre tableau de signes.

3- Placer les racines (les points sur l'axe des abscisses)

Les valeurs pour lesquelles la fonction s'annule (les racines $x_1, x_2, x_3 \dots$) sont les endroits où la courbe va **couper l'axe des abscisses** (l'axe horizontal, là où $f(x) = 0$).

Considérons $f(x) = 2(x + 2)(x - 3)$.

On pourra alors placer deux points aux coordonnées $(-2, 0)$ et $(3, 0)$, comme suit :

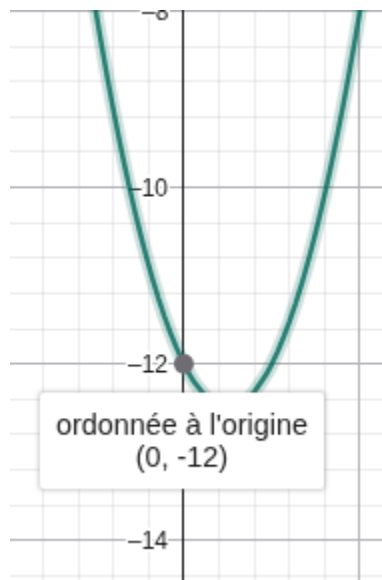


4- L'ordonnée à l'origine

C'est le point de départ vertical.

Pour savoir à quelle hauteur la courbe traverse l'axe vertical, on calcule l'image de 0, soit $f(0)$.

- Dans une forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, remplacez simplement x par 0.
- **Exemple :** Si $f(x) = 2(x + 2)(x - 3)$, alors $f(0) = 2(2)(-3) = -12$. La courbe doit alors passer par le point $(0, -12)$.



5- Le rôle du coefficient a

Le coefficient a (le nombre devant les parenthèses) détermine l'orientation globale de la courbe, surtout aux extrémités du graphique.

- **Si $a > 0$:** La fonction finit par "monter" vers la droite (vers $+\infty$). Si le degré est pair (ex: parabole), elle commence aussi en haut à gauche. Si le degré est impair, elle vient d'en bas à gauche.
- **Si $a < 0$:** La fonction finit par "descendre" vers la droite (vers $-\infty$). La courbe est "renversée".

	$a > 0$	$a < 0$
Degré Pair	La courbe commence en haut à gauche	La courbe se termine en bas à droite
Degré Impair	La courbe commence en bas à gauche	

Astuce : Regardez le signe dans la dernière case à droite de votre tableau de signes. Si c'est un "+", la courbe finit au-dessus de l'axe. Si c'est un "-", elle finit en dessous.

Dans notre exemple, a étant positif et le polynôme de degré pair, la courbe commencera en haut à gauche.

Nous verrons aussi au §9 et §10 que la valeur de a influence le tassement ou l'étirement de la courbe.

5- Etablir le tableau de signes

On commence par placer les valeurs "remarquables" de x par ordre croissant sur la première ligne, telles que trouvées au §3 et §4.

Dans l'exemple ces valeurs sont :

- Les racines : $(-2; 0)$ et $(3; 0)$
- L'ordonnée à l'origine : $(0; -12)$

Ce qui nous donne :

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
-----	-----------	----	---	---	-----------

Sur la ligne suivante, on donne le "signe" de $f(x)$ dans chacun des intervalles définis par x , comme suit :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	-	0	+	

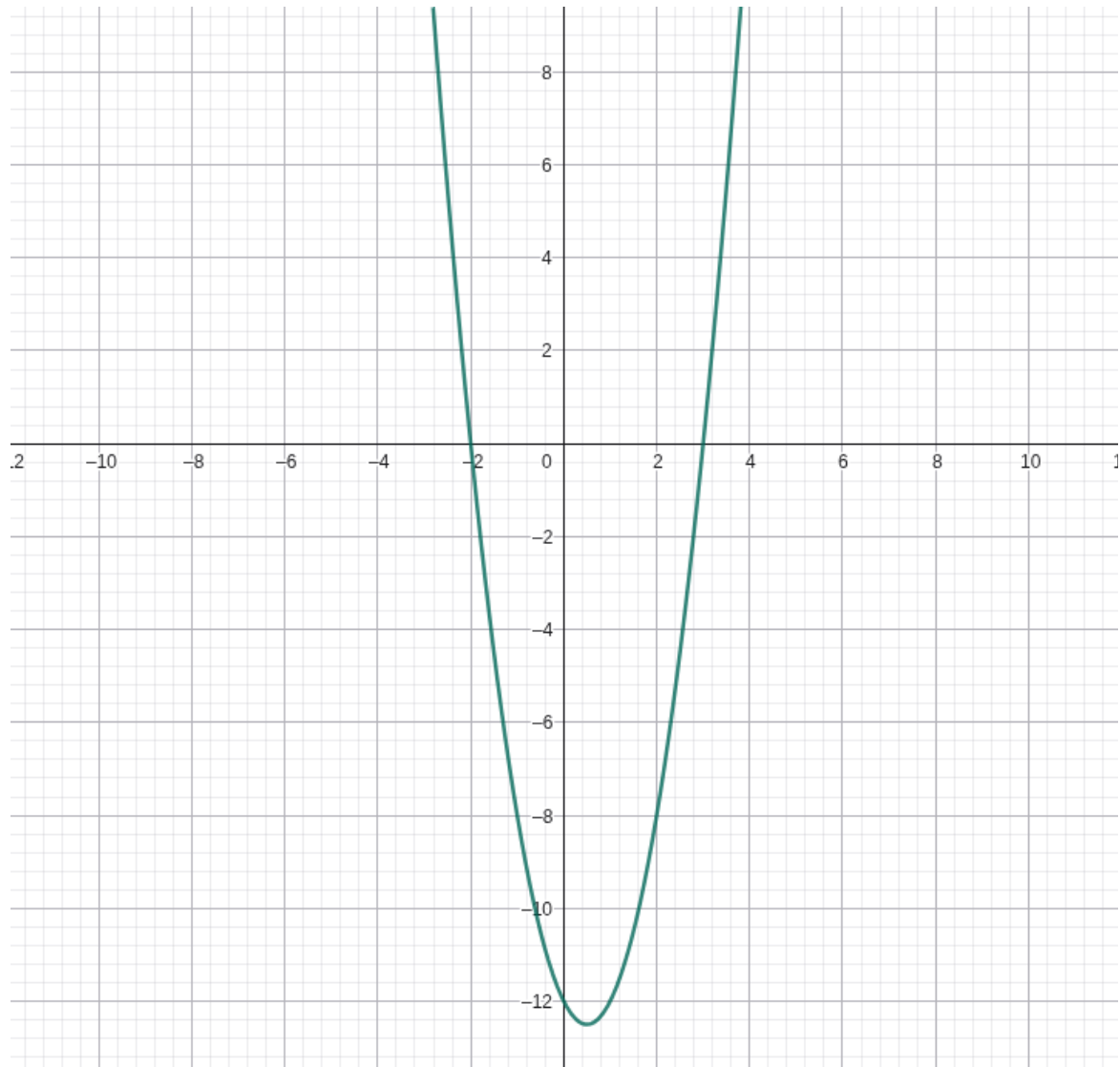
6- Esquisse de la courbe

Pour esquisser la courbe, on se sert de ces 3 règles :

- **Signe (+) dans le tableau :** La courbe doit être tracée **au-dessus** de l'axe des abscisses.
- **Signe (-) dans le tableau :** La courbe doit être tracée **en dessous** de l'axe des abscisses.

- Ou commence (en $-\infty$) et ou termine ($+\infty$) la courbe selon valeur de a tel que vu au §5.

Ce qui nous donne :



7- Trouver la fonction à partir du tableau de signes

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	-	0	+	

- Le squelette de l'équation est $a(x+1)(x-2)(x-3)$ car -1, 2 et 3 sont solution de $f(x) = 0$.
- On ne connaît pas a mais on sait qu' **au voisinage** de $+\infty$ la courbe est positive, au-dessus de l'axe des abscisses, ce qui nous indique que a est POSITIF ET que le degré du polynôme est **PAIR**.
- **ATTENTION** à ce qui suit :

Il existe une valeur pour laquelle $f(x)$ s'annule mais pour laquelle de part et d'autre de cette valeur la courbe a le même signe. Cette valeur est $x = -2$. Si il y avait changement de signe, la courbe traverserait l'axe des abscisses. Or ici ce n'est pas le cas, la courbe vient rebondir sur l'axe des abscisses en (2;0), par conséquent nous avons nécessairement un $(x-2)^n$ au lieu de $(x-2)$.

Le squelette devint donc $a(x+1)(x-2)^n(x-3)$ avec **NÉCESSAIREMENT** n PAIR et a POSITIF.

On dit que $(x-2)^n$ est une racine (double ou quadruple ou sextuple ...) mais généralement "racine double".

8- Variante avec un a négatif

On reprend le même tableau de signe, avec une inversion complète des signes :

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	+	0	-	

Dans ce cas on remarque qu'au voisinage $+\infty$, le signe est négatif cette fois. Donc la courbe de termine en bas à droite, on en déduit donc que nécessairement $a < 0$.

Le squelette de la courbe est alors le même avec une **différence importante** sur la valeur de a

Le squelette reste le même $a(x+1)(x-2)^n(x-3)$ mais avec **NÉCESSAIREMENT** n PAIR et a NEGATIF.

9- Peux t'on trouver la valeur de a ?

Pour trouver la valeur précise de a , il nous faut **un point de comparaison vertical**.

En effet, le tableau de signes nous donne les "portes" horizontales (les racines) sur l'axe des abscisses, mais il ne nous dit pas si la courbe est très étirée vers le haut ou très écrasée.

En revanche si l'énoncé nous donne une information supplémentaire, à savoir un point supplémentaire de la courbe situé en dehors de l'axe des abscisses, on peut alors trouver la valeur de a .

Par exemple, reprenons le squelette précédent $a(x+1)(x-2)^n(x-3)$ et supposons que $n = 2$ pour simplifier. Le squelette s'écrit alors : $a(x+1)(x-2)^2(x-3)$ avec a positif.

Si dans l'énoncé, on nous dit que le point $(0; -24)$ appartient à la courbe, on peut maintenant calculer la valeur de a comme suit :

- $a(x+1)(x-2)^2(x-3) = -24$ avec $x = 0$, donc
- $a(0+1)(0-2)^2(0-3) = -24$
- $a(1)(4)(-3) = -24$
- $-12a = -24$
- $a = 2$

L'équation finale devient alors $f(x) = 2(x+1)(x-2)^2(x-3)$

10- Influence de a sur la courbe

Pour bien visualiser l'influence de a , imaginons que la structure de la courbe (ses racines) est faite de points fixes cloués sur l'axe des abscisses, et que la courbe elle-même est un **élastique**.

Le coefficient a est la force qui tire ou compresse cet élastique verticalement.

10.1. L'effet de "L'amplitude" $|a|$

C'est la valeur numérique de a (sans son signe) qui détermine l'étirement :

- Si $|a| > 1$, nous avons un **ÉTIREMENT VERTICAL** de la courbe :
La courbe est "étirée". Les sommets et les creux deviennent beaucoup plus hauts et plus profonds. Plus a est grand, plus la courbe semble étroite et abrupte. Elle s'éloigne très vite de l'axe x .
- Si $0 < |a| < 1$ nous constatons une Compression (ou Tassement) de la courbe :
La courbe est "écrasée" vers l'axe des abscisses. Les bosses sont très plates. Si $a = 0,1$ par exemple, la courbe aura l'air presque horizontale entre les racines avant de monter très doucement.

10.2. Pourquoi cela change-t-il l'ordonnée à l'origine ?

Le calcul de $f(0)$ dépend directement de a .

En effet, si on reprend notre équation $f(x) = a(x + 1)(x - 2)^2(x - 3)$:

- Si $a = 1$, alors $f(0) = -12$.
- Si $a = 2$, alors $f(0) = -24$. (La courbe descend deux fois plus bas).
- Si $a = \frac{1}{2}$, alors $f(0) = -6$. (La courbe est deux fois plus proche de l'axe).

10.2. L'influence de a en résumé

Valeur de a	Impact sur la courbe	Aspect visuel
Très grande ($a = 10$)	Accélération forte	"Murs" verticaux, pics pointus
Standard ($a = 1$)	Référence	Courbe équilibrée
Très petite ($a = 0,1$)	Ralentissement	Courbe "paresseuse", très plate
Négative ($a < 0$)	Inversion	La courbe est le reflet de la positive (miroir)