Les polynômes de degré 3 et plus

1. Le degré 3

Forme générale : $f(x) = a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$, avec (a, b, c et d appartenant tous à $\mathbb{R}$ et $a \neq 0$

1.2 résoudre $f(x) = 0$

Il n'y a pas de calcul de discriminant, et seulement 2 façon de résoudre un tel cas :

- Trouver une racine évidente.
- Méthode de Cardan.

1.2.1 Méthode de la "Racine évidente"

Prenons comme exemple le polynôme $f(x) = -2x^3 + 7x^2 - 10x + 8$

NOTA : **C'est la méthode LA PLUS RECOMMANDEE, mais elle ne fonctionne pas toujours !**

Le principe est de trouver une valeur qui serait racine évidente. Alors on va essayer successivement $f(-3), f(-2), f(-1), f(1), f(2) et f(3)$. On peut éventuellement aller jusqu'à $f(4) et f(-4)$.

Dès que l'on trouve un $f(x) = 0$, alors ce x est une racine évidente.

Dans le cas présent, $f(2) = 0$, 2 est donc une racine évidente de ce polynôme.

L'étape suivante consiste donc à procéder à une division polynômiale de $f(x)$ par $(x - 2)$. Cf. 1.2.4.

On obtient alors comme dividende $f_1(x) = (x - 2)(-2x^2 + 3x - 4)$ avec un reste égal à zéro, ce qui est parfaitement normal puisque $x = 2$ est solution de $f(x) = 0$.

Dans l'étape suivante, on va alors chercher les solution à $f_1(x) = 0$, soit $(x - 2)(-2x^2 + 3x - 4) = 0$.

Etant donné que nous avons à faire avec un polynôme de second degré, on procède comme tout polynôme de second degré.

Après calcul on constatera que $P(x) = (x-2)(-2x^2+3x-4)$
n'a de solution que dans C ($\Delta < 0$), comme suit :

- $x_1 = \dfrac{3-i\sqrt{23}}{4}$ et
- $x_2 = \dfrac{3+i\sqrt{23}}{4}$

Et donc le résultat final du polynôme de degré 3 factoriser sera :

$$P(x) = -\mathbf{2}(\mathbf{x}-\mathbf{2})\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{3}+\mathbf{i}\sqrt{\mathbf{23}}}{\mathbf{4}}\right)\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{3}-\mathbf{i}\sqrt{\mathbf{23}}}{\mathbf{4}}\right)$$

En résumé : 1- Trouver une racine évidente (qu'on appellera x_1)parmi les valeurs simples. 2- Factoriser le polynôme par $(x-x_1)$. 3- Si on arrive pas à factoriser simplement, procéder à division polynômiale de $P(x)$ par $(x-x_1)$. Cf. 1.2.4

1.2.2 Identités remarquables

Il arrive que le polynôme corresponde à l'une des identités remarquables suivantes :

Identité #1	$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$
Identité #2	$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$
Identité #3	$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
Identité #4	$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

Pour trouver simplement une identité remarquables appliquer la démarche suivante dans l'ordre :

1- Ranger par ordre décroissant de puissance les membres du polynômes.
2- Nommer A^3 le premier terme au Cube.
3- Nommer B^3 le dernier terme en puissance 0 (si ce terme n'existe pas, le polynôme ne peut pas être une identité remarquable).
4- A^3 et B^3 sont t'il les cubes de quelque chose ?

- Si oui
  - Y'a t'il alternance de signe $+$ et dans le polynôme?
    - Si Oui -> Nous sommes en présence de l'**identité 4**.
    - Si Non -> Nous sommes en présence de l'**identité 3**.
- Si non
  - Peux t'on factoriser par $(A+B)$?
    - Si Oui -> Nous sommes en présence de l'**identité 1**.
    - Si Non -> Peux t'on factoriser par $(A-B)$?
      - Si Oui -> Nous sommes en présence de l'**identité 2**.
      - Si Non -> Il ne s'agit pas d'une identité remarquable.

1.2.3 Méthode de Cardan

Si le polynôme n'admet pas de racine évidente facilement identifiable, la solution générale est d'appliquer la **méthode de Cardan**. C'est une méthode complexe qui permet de trouver toutes les racines de manière formelle.

📝 Principe

1. **Réduction :** L'équation $ax^3+bx^2+cx+d=0$ est transformée, par le changement de variable $x=t-\dfrac{b}{3a}$, en une **forme réduite** sans terme en t^2 :
   $t^3+pt+q=0$
2. **Application de la formule :** Les solutions t sont exprimées à l'aide de radicaux et de racines cubiques complexes (formules de Cardan).
3. **Retour à x :** On utilise ensuite la relation $x=t-\dfrac{b}{3a}$ pour obtenir les racines du polynôme initial.

Cette méthode est historiquement importante et théorique, mais elle est rarement utilisée en pratique pour la résolution manuelle en raison de sa complexité et de la fréquence où elle nécessite l'utilisation des nombres complexes.

1.2.4 Division polynômiale

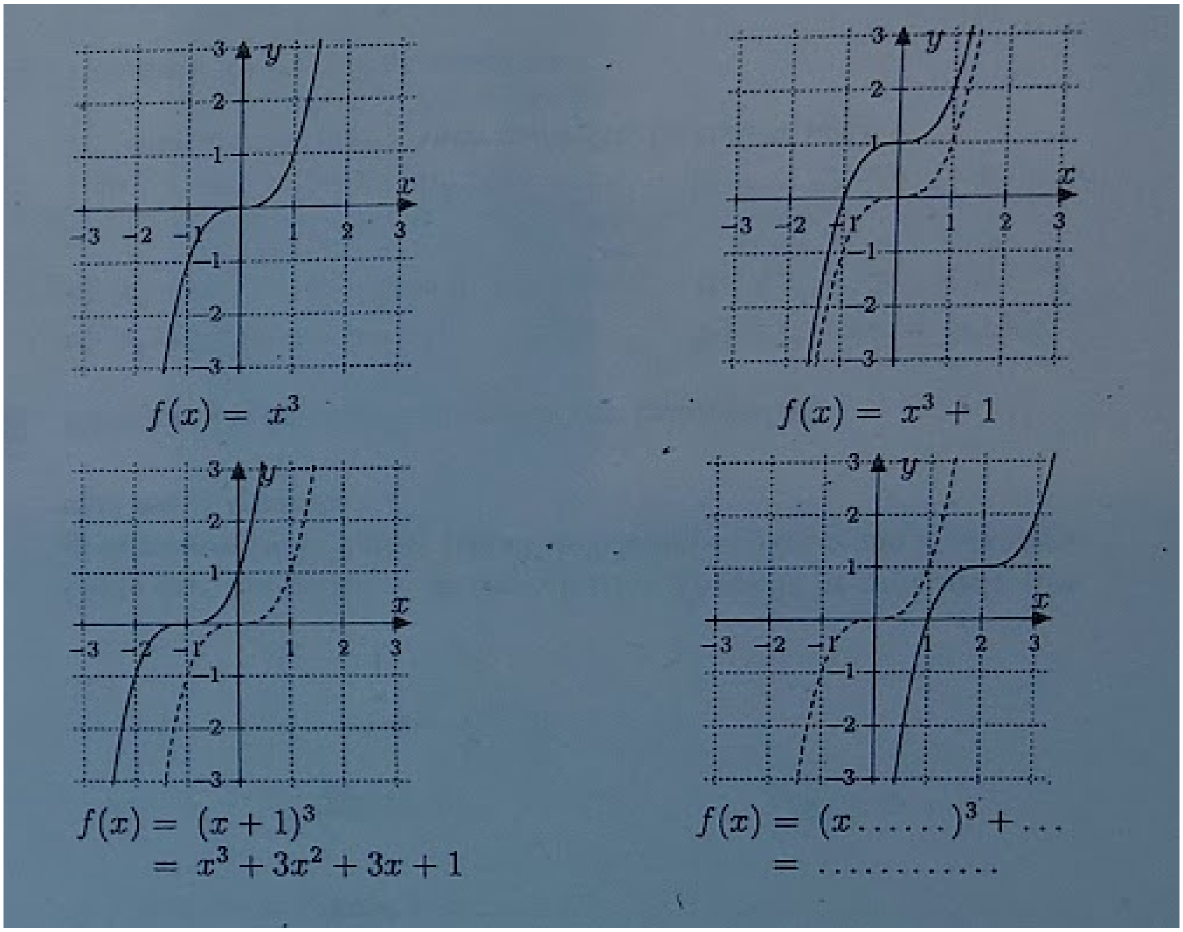
Pour un polynôme $P(x)$ de degrés 3, si on trouve une des solutions x_1 pour $P(x)=0$ alors on peut factoriser $P(x)$ par $(x-x_1)$ tel que $P(x)=(x-x_1)D(x)$ … reste à trouver $D(x)$!

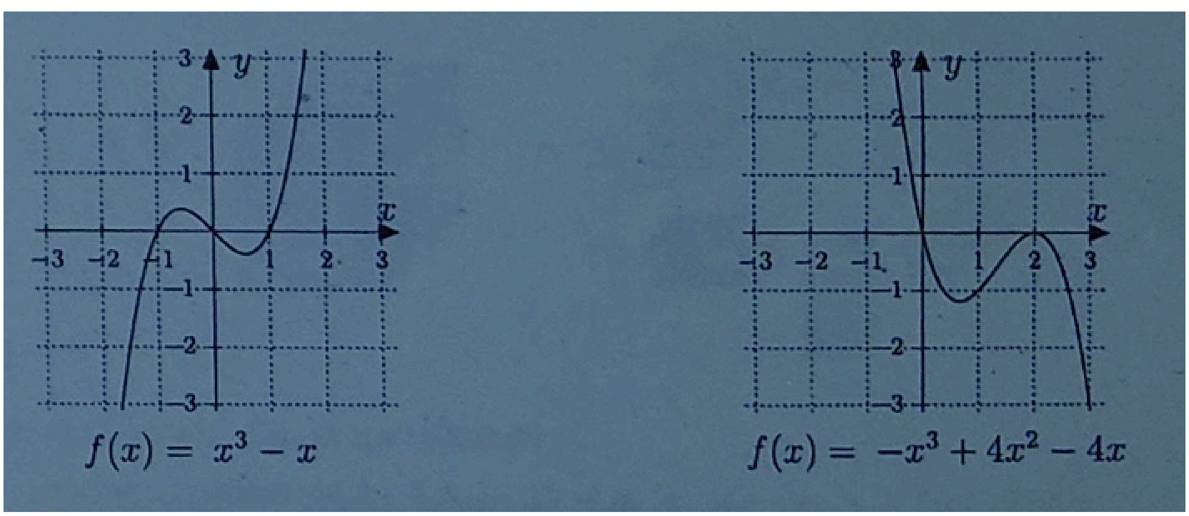
Parfois la solution est évidente puisque $D(x)$ est un polynôme de degré 2 au maximum. Par exemple $D(x)$ peut-être même une identité remarquable de degré 2.

Sinon si la solution n'est pas si évidente, l'idée est donc de trouver D(x) tel que que $(x-x_1).D(x)=P(x)$ et dont diviser $P(x)$ par $(x-x_1)$.

1.3 Etude de la fonction

En préambule, voici quelques graphes de fonctions en x^3





Pour cela reprenons notre polynôme exemple $f(x) = -2x^3 + 7x^2 - 10x + 8$

1.3.1 Domaine de définition : Nous savons que tout polynôme (quelque soit son degré) sera défini sur $\mathbb{R}$, donc des valeurs de x vont varier de $-\infty$ à $+\infty$

1.3.2 Calcul de la dérivée

Rappels (Cf. document sur les dérivées) :
- La dérivé d'une somme est la somme des dérivées.
- La dérivé de $a.x^n$, est $(a.x^n)' = n.a.x^{n-1}$, ou a appartient à R.

Donc $(-2x^3 + 7x^2 - 10x + 8)' = -6x^2 + 14x - 10$

Etudions le signe de $f'(x)$; Recherchons donc en premier les valeurs pour lesquelles $f'(x) = 0$

On l'a vu précédemment ce polynôme n'a pas de solution dans R, son discriminant est négatif. Donc la courbe de $f'(x)$ est soit au-dessus de l'axe des abscisses soit en dessous, sans jamais le couper. Or $a = -6$ est négatif, cette corbe est donc en forme de U inversé, et quelle que soit la valeur de x, $f'(x)$ **sera toujours négatif**. Et ça, ça nous intéresse … car si $f'(x)$ est toujours négatif, alors $f(x)$ est strictement décroissante sur R !

1.4.3 Esquisse du tableau de variation

Voici un résumé de ce que nous savons déjà sur cette fonction f …

x	$-\infty$	2	$-\infty$
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$	Positif et décroissant	0	Négatif et décroissant
C_f	Descendante	Coupe l'axe des abscisses	Descendante

1.4.4 Calcul du point d'inflexion

Nous pouvons maintenant essayer d'en savoir plus, grâce à l'étude de la dérivée seconde, c'est-à-dire l'étude de la dérivée de f' , que l'on appelle f''.

Nous avons $f'(x) = -6x^2 + 14x - 10$, donc $f''(x) = (-6x^2 + 14x - 10)' = (-12x + 14)$

f''(x) va donc s'annuler au point d'abscisse $x = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$ et d'ordonnée $f(\frac{7}{6}) = \frac{145}{54}$

1.4.5 Etablissement de la convexité

- lorsque $x < \frac{7}{6}$, f''(x) est **positive**, donc f est **convexe** (cf. cours sur la convexité)
- lorsque $x > \frac{7}{6}$, f''(x) est **négative**, donc f est **concave** (cf. cours sur la convexité)

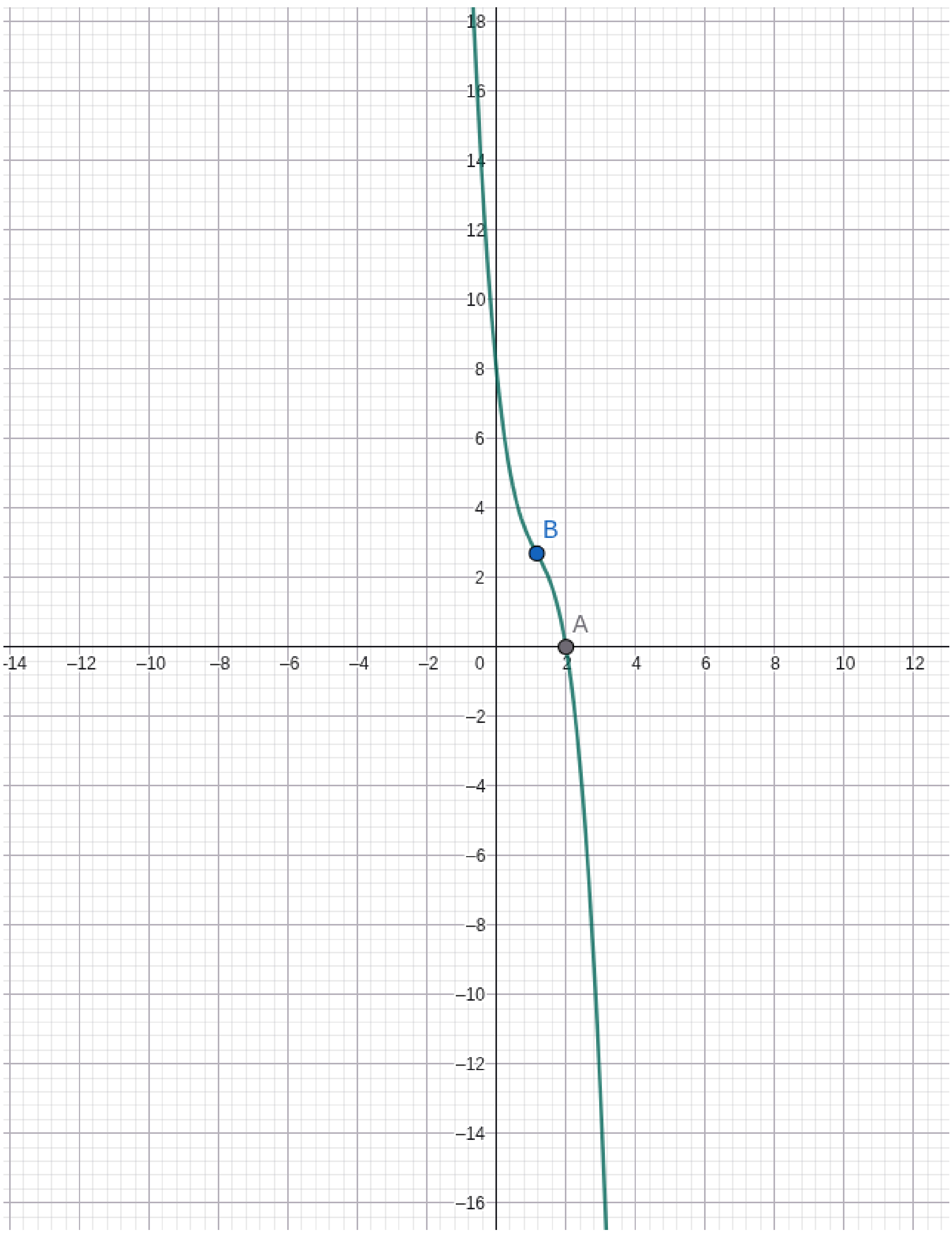
1.4.6 Conclusion sur le tableau de variations

On peut donc compléter notre tableau de variation de f,avec un point d'inflexion et un changement de convexité de sa courbe en $x = \frac{7}{6}$:

x	$-\infty$	$\frac{7}{6}$	2	$-\infty$
$f'(x)$	-	Inutile de calculer ceci, ça ne nous apprend rien de plus	-	-
$f(x)$	Positif et décroissant	$\frac{145}{54}$	0	Négatif et décroissant
C_f	Descendante et Convexe	Point d'inflexion	Coupe l'axe des abscisses	Descendante et Concave

1.4.7 Traçage de la courbe

On en sait suffisamment pour esquisser la courbe. A est le point de coordonnées $(2;0)$ ou la courbe coupe l'axes de abscisses et B le point d'inflexion.



B
A
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
12

Nota : Bien que l'équation de départ soit de degré 3, elle a une racine évidente donc ça aide. Et bien que une fois factorise par sa racine évidente, il nous reste une équation de degré 2 résolvable dans C uniquement, on peut tout de même - sans factoriser cette fonction jusqu'au bout - en étudier le comportement par sa dérivée première et seconde et trouver son point d'inflexion, sa convexité ainsi qu'un esquisse de sa courbe. Et ceci demeure valable pour tous les polynômes de degré 3, qu'ils aient ou non des solution dans C.

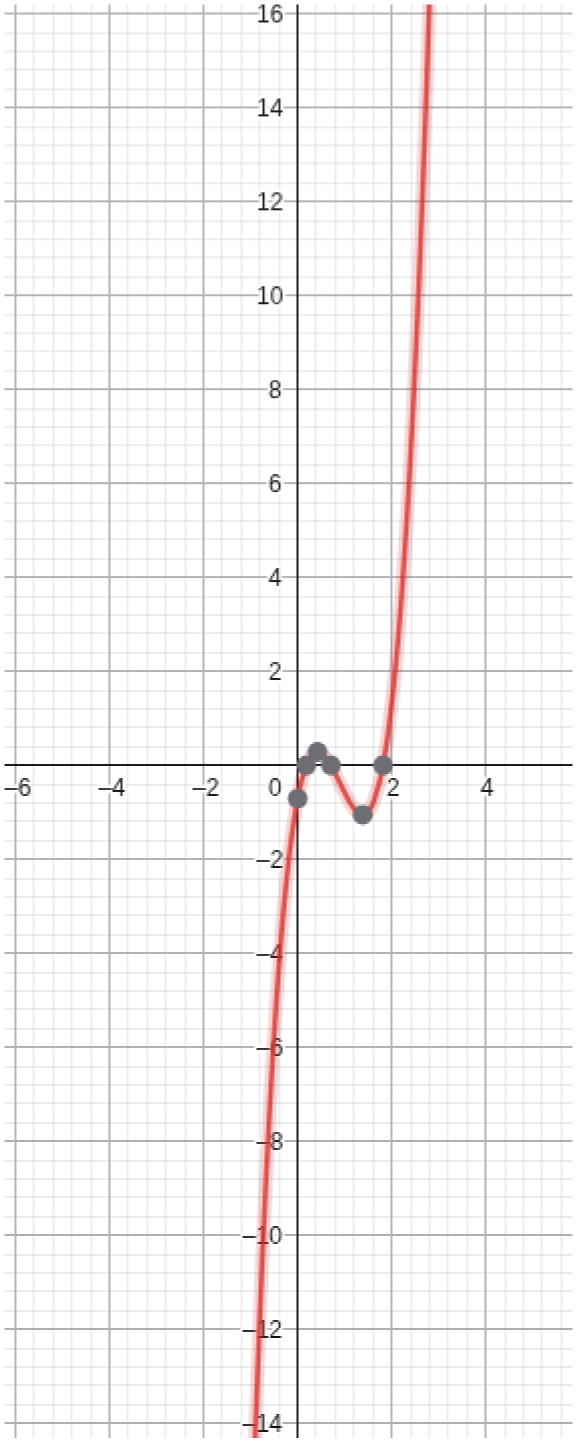
Prenons un exemple ou 1, 2, 3, -1, -2 et -3 ne sont pas des racines évidentes mais pourtant, l'exercice suivant aide à trouver ces racines puis à étudier cette fonction :

Soit le nombre $\mathbf{x_3 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}}$

Vérifier que ce nombre est solution de l'équation $\mathbf{3x^3 - \left(6 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) x^2 + \left(1 + 3\sqrt{2}\right) x - \frac{\sqrt{2}}{2}}$

En factoriser ce polynôme par $\mathbf{x_3 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}}$, trouver toutes les solutions de celui-ci, puis l'étudier en tant que fonction $f(x)$ de degré 3.

Si on étudie cette fonction dans son intégralité on arrivera à tracer sa forme comme ceci :



2. Astuce “du candidat”

Prenons un polynôme quelconque de degré 3 sous sa forme factorisée $(x+a)(x+b)(x+c)$
On le développe :

$(x+c)(x^2+ax+bx+ab)$ qui devient $x^3+cx^2+ax^2+acx+bx^2+bcx+abx+abc$

On remarque que le seul terme ne dépendant pas de x vaut abc, il est donc le produit des 3 solutions a, b et c participant à la factorisation de ce polynôme. On peut en déduire que :

Si un polynôme sous sa forme développée contient un monôme avec x^0, le produit des solutions de ce polynôme P(x)=0, si elles existent, est égal à ce monôme. Nota : Cela signifie que ce monôme est probablement décomposable en produit de facteur premier.

Exemple : $x^3-6x^2+11x-6$

La valeur 6 est décomposable en facteurs premiers : $1,2,3,6,-1,-2,-3et-6$. Parmi ces différents nombres, certains seront solutions de ce polynôme tel que $P(x)=0$.

Après calcul, il s'avère que $P(x)$ factoriser vaut $(x-1)(x-2)(x-3)$, les valeurs $1,2et3$ sont bien parmi les solutions qui étaient envisagées, les autres facteurs premiers n'étant pas retenus car ils ne sont pas solution de $P(x)=0$.

De surcroît, nous avons bien $1*2*3=6$

NOTA : Cette astuce EST VALABLE POUR TOUS LES POLYNOME, à partir du degrè 2 !

3. Le degré 4

On ne va pas refaire tout le cours sur l'étude de ce type de fonction, puisque la méthodologie est identique sur le degré 1, 2, 3, 4 … n ! Par contre ici on parlera juste de comment on s'y prend pour résoudre une équation de type $f(x)=0$ de degré 4.

3.1 Équation de type Bicarrée

L'équation ne contient que des puissances paires de x (pas de x^3 ni de x).

$ax^4+cx^2+e=0$

1. **Substitution :** Poser $\mathbf{y}=\mathbf{x^2}$.
2. **Transformation :** L'équation devient une équation du second degré en y : $ay^2+cy+e=0$.
3. **Résolution :** Trouvez les solutions y_1 et y_2 à l'aide du discriminant.
4. **Retour à x :** Les solutions finales pour x sont données par $x^2=y_1$ et $x^2=y_2$. Chaque solution positive de y donne deux solutions réelles (Dans R) pour x ($\pm\sqrt{y}$), et

chaque solution négative de y donne deux solutions complexes (dans C) pour x ($\pm i\sqrt{|y|}$).

3.2 Racine Évidente et Factorisation

Si une solution simple x_1 est évidente (souvent ± 1, ± 2, 0, etc.), vous pouvez factoriser.

1. **Test :** Vérifiez si $P(x_1) = 0$.
2. **Division :** Le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x - x_1)$.
3. **Réduction :** $P(x) = (x - x_1)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$.
4. **Poursuite :** Vous êtes ramené à la résolution d'un polynôme de degré 3, qui est généralement résolu en cherchant une autre racine évidente (voir la méthode de résolution de degré 3).

4. La méthode de Horner

C'est la méthode la plus utilisée pour diviser un polynôme par $(x - a)$.

Exemple : Diviser $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ par $(x - 3)$. Ici, notre "racine" est **3**.

Étape par étape :

On trace un tableau. Sur la première ligne, on place les **coefficients** du polynôme (attention à mettre un 0 si une puissance de x manque).

À gauche, on place la valeur de la racine (ici **3**).

	2 (x^3)	**-6** (x^2)	**2** (x^1)	**-1** (constante)
3				
	2			

On descend le premier chiffre (2).

On multiplie ce chiffre par la racine ($2 \times 3 = 6$) et on place le résultat sous le coefficient suivant.

On additionne la colonne ($-6 + 6 = 0$).

On recommence ($0 \times 3 = 0$), on l'ajoute à 2 $\rightarrow$ 2.

On recommence ($2 \times 3 = 6$), on l'ajoute à -1 $\rightarrow$ 5.

Le tableau final ressemble à ceci :

	2	-6	2	-1
3	↓	6	0	6
	2	**0**	**2**	**[5]**

Le tableau nous donne deux informations cruciales :

- **Le quotient :** Les premiers chiffres (**2, 0, 2**) sont les coefficients du nouveau polynôme, qui aura un degré de moins.
  - Résultat : $2x^2 + 0x + 2$ soit $2x^2 + 2$.
- **Le reste :** Le dernier chiffre (**5**) est le reste de la division.
- **La valeur :** On sait aussi que $P(3) = 5$.

> **Note :** Si le reste est **0**, cela signifie que $(x - a)$ divise parfaitement le polynôme et que a est une racine du polynôme.