

Etude de Fonctions du second degré

1. Définitions

$f(x) = a.x^2 + b.x + c$, est dit “fonction parabolique”, c’est l’équation d’une parabole dans un repère orthonormé. On peut l’écrire sous la forme $y = a.x^2 + b.x + c$; ce qui signifie que pour chaque valeur de x , on peut obtenir une valeur de y et donc un point (x, y) dans le repère orthonormé. Pour cette raison le domaine de définition de $f(x)$ est $\mathbb{R}$, car pour toute valeur de x dans $\mathbb{R}$, il existe une valeur de y .

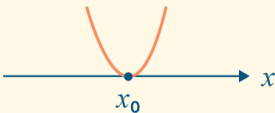
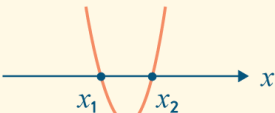
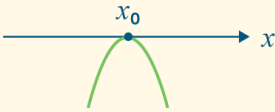
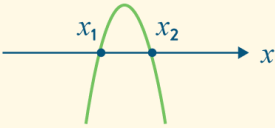
Un polynôme de second degré $ax^2 + bx + c$ peut s’écrire sous 3 formes.

Exemple avec $3x^2 - 6x - 9$:

- La **forme développée** $[3x^2 - 6x - 9]$ sert à vérifier qu’il s’agit bien d’un polynôme du second degré.
- La **forme factorisée** $[3(x - 3)(x + 1)]$ sert essentiellement à résoudre des équations et inéquations du second degré.
- La **forme canonique** $[3(x - 1)^2 - 12]$ sert à étudier les variations ou trouver un extremum (minimum ou maximum).

2. Propriétés

On considère un polynôme de second degré sous la forme $a.x^2 + b.x + c$ avec Δ son discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$). On peut déduire les choses suivantes :

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			
	aucune solution	une seule solution x_0	deux solutions x_1 et x_2

© SCHOOLMOUV

3. Etablir la forme factorisée

Les solution x_1 et x_2 sont les suivantes :

- $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et,
- $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Avec $(\Delta = b^2 - 4ac)$

Notas :

- Si $\Delta = 0$ alors $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$ alors $f(x_1) = f(x_2) = 0$, puisque la parabole coupe l'axe des abscisses en 0.
- Si $\Delta < 0$ alors pas de solutions dans $\mathbb{R}$ (**noter bien** : Pas de solution dans $\mathbb{R}$ car en réalité il existe des solution dans $\mathbb{C}$!), la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses et le signe de a détermine le sens de la courbe. Dans ce cas $f(x)$ **est factorisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$** .

Avec ces calculs on a pu déterminer quel est (ou quels sont) le(les) point(s) ou la courbe coupe l'axe des abscisses. On peut aussi dire que si $\Delta < 0$, le courbe ne coupera jamais l'axe des abscisses quel que soit son sens.

On peut aussi maintenant écrire l'équation $f(x)$ sous sa **forme factorisée** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ si elle admet 1 ou 2 solution ($\Delta \geq 0$).

Par exemple pour $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$, les solutions étant $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$, on obtient la forme factorisée $3(x - 3)(x + 1)$.

4. Etablir la forme canonique

Elle est de la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Exemple avec $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = -(-6)/2.3 = 1$$

$$\beta = f(\alpha) = f(1) = 3(1)^2 - 6.1 - 9 = 3 - 6 - 9 = -12$$

La forme canonique est donc $3(x - 1)^2 - 12$

On remarque que différentes valeurs de β vont déplacer la courbe parallèlement à l'axe des ordonnées et que les différentes valeurs de α vont la déplacer parallèlement à l'axe des abscisses.

Le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$ est dit point d'inflexion de la courbe. C'est le point qui détermine l'endroit où le sens de la courbe va s'inverser. Si elle descendait (respectivement remontait), elle commencerait alors à remonter (respectivement redescendre) à ce point.

Par ailleurs, on notera aussi qu'en ce point de coordonnée $(\alpha; \beta)$, la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses.

En effet, $f'(\alpha)$ vaut toujours 0. Exemple pour $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$:

$$f'(x) = 6x - 6 = 6(x - 1) \text{ et}$$

$$f'(\alpha) = f'(1) = 0$$

5. Utiliser la forme canonique pour établir le tableau de variations

- Si $a = 0$ alors c'est un polynôme de **PREMIER DEGRÉ (cf. fonction affine)** !
- Si $a > 0$

x	$-\infty$	$\alpha = 1$	$+\infty$	Courbe en U
$f(x)$	$\searrow$	$\beta = f(\alpha)$	$\nearrow$	

F admet un **MINIMUM** de coordonnées $(\alpha; \beta)$

- Si $a < 0$

x	$-\infty$	$\alpha = 1$	$+\infty$	Courbe en $\cap$
$f(x)$	$\nearrow$	$\beta = f(\alpha)$	$\searrow$	

F admet un **MAXIMUM** de coordonnées $(\alpha; \beta)$

NOTA : Il est important de ne pas confondre

- Le minimum (ou maximum) de la courbe qui est une seul point de coordonnées $(\alpha; \beta)$ que l'on calcule en établissant **la forme canonique** avec
- Les solutions qui vérifient $f(x) = 0$, c'est à dire les 0, 1 ou 2 points que l'on trouve (selon la valeur de Δ) et qui coupent la courbe sur l'axe de abscisses et que l'on établit à l'aide de la **forme factorisée**.

6. Autres propriétés déduites

Le sens de la courbe est déterminé par la valeur de a ($a < 0$ ou $a > 0$). Si $a = 0$, nous avons un polynôme de 1er degré.

On dit que le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$ est le point d'inflexion (ou extremum) de la courbe, c'est là ou elle change de sens. Si $a > 0$ (respectivement $a < 0$), le point $(\alpha; \beta)$ est le point le plus bas le minimum (respectivement le plus haut, le maximum) de la courbe.

7. Résoudre une inéquation de Second Degré

L'équation de second de second degré est de la forme $a.x^2 + b.x + c > 0$.

Bien sûr on peut avoir à résoudre ≥ 0 , ou < 0 ou encore ≤ 0 .

Mais aussi sous la forme $a.x^2 + b.x > c > 0$, dans ce cas faire passer c de l'autre côté, ce qui donnera $a.x^2 + b.x - c > 0$

Par ailleurs, nous savons que selon le signe de a , la courbe sera en U ou bien en $\cap$.

Nous savons aussi que cette équation peut admettre respectivement 2, 1 ou 0 solutions selon la valeur de δ et que donc elle coupera l'axe d' abscisse respectivement en 2 points, en 1 point ou en 0 points. En étudiant le tableau de variation de l'équation, on peut donc trouver l'ensemble des solutions permettant de résoudre une inéquation.

Ainsi, reprenons l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$

Supposons qu'on nous demande de calculer les solutions de l'inéquation $f(x) = 3x^2 - 6x - 9 > 0$

Établissons dans un premier temps son tableau de variations :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.3. - 9 = 26 + 4.3.9 = 26 + 108 = 134$$

Puisque $\Delta > 0$ alors $f(x) = 0$ admet 2 solutions. Calculons les :

- $x_1 = \frac{1 - \sqrt{134}}{6}$
- $x_2 = \frac{1 + \sqrt{134}}{6}$

Établissons alors le tableau de variations :

x	$-\infty$	x_1	$\alpha = 1; \beta = 12$	x_2	$+\infty$
$f(x)$	Décroissant e mais POSITIVE	0	Décroissant puis croissante, mais NÉGATIVE	0	Croissante mais POSITIVE

Etant donné que nous cherchons les solutions de l'inéquation **STRICTEMENT SUPÉRIEURE** à ZÉRO, on doit retenir les valeurs strictement positives de $f(x)$.

Ces valeurs sont dans les intervalles :

- $] -\infty; x_1[$ car $f(x)$ est **POSITIVE** selon le tableau de variations
et
- $]x_2; +\infty[$ car $f(x)$ est aussi **POSITIVE** selon le tableau de variations

On donnera alors l'ensemble des solutions S comme ceci :

$S =] -\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$, ce qui signifie que l'ensemble de ces solutions se trouve dans l'union de ces 2 intervalles de valeurs réelles.

Concernant les bornes : que ce soit en $+\infty$ ou en $-\infty$, les bornes seront toujours **ouvertes**.

Et dans le cas présent, en x_1 et en x_2 les bornes sont ouvertes car on précise **STRICTEMENT SUPÉRIEUR** dans le calcul des solutions à l'inéquation $3x^2 - 6x - 9 > 0$.

8. Trouver une tangente à la courbe

A chaque point de la courbe d'une équation $f(x) = a.x^2 + b.x + c$, il est possible de déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe de f en ce point.

Si on nomme les coordonnées de ce (u, v) alors pour le point d'abscisse u , l'équation de la droite tangente à la courbe de f sera $y = f'(u)(x - u) + f(u)$, avec f' la dérivée de f .

Prenons un exemple $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$ et le point d'abscisse $(3; v)$ à trouver.

Nous avons donc :

- $f'(x) = 6x - 6$
- donc $f'(3) = 6.3 - 6 = 12$
- et $f(3) = 3.3^2 - 6.3 - 9 = 27 - 18 - 9 = 0$

Ainsi l'équation de la tangente est :

- $y = f'(u)(x - u) + f(u)$
- $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$
- $y = 12(x - 3) + 0$
- $y = 12x - 3$

et si $u = 3$, alors $v = 12.3 - 3 = 33$

Conclusion : la droite d'équation $y = 12x - 3$ est tangente à la courbe de F au point de coordonnées $(3; 33)$.

9. Trouver l'équation d'un parabole

Si on connaît les coordonnées du sommet $(\alpha; \beta)$ de la parabole ainsi que un de ses points $(x_1; y_1)$, on peut retrouver son équation, comme suit :

Étape 1 : Nous savons que la forme canonique est $a(x - \alpha)^2 + \beta$, donc on le remplace par les valeurs de α et β connues.

Étape 2 : On évalue $y_1 = f(x_1)$ avec la nouvelle équation, de façon à trouver la valeur de a .

Étape 3 : Connaissant α et β , on peut exprimer maintenant la forme canonique, factorisée ou développée dans son intégralité.

10- Et si Delta Δ est négatif ?

Commençons par relire les points 1 et 2 de la fiche sur les nombres complexes, pour bien comprendre que au dessus de $\mathbb{R}$ il existe un ensemble $\mathbb{C}$ (ensemble des complexes ou ensemble des nombres imaginaires) dont la forme est $z = a + ib$, où a est la partie réelle de z et b sa partie imaginaire.

Ceci étant dit, nous savons aussi que dans cet ensemble $i^2 = -1$, et comme notre Δ est négatif, nous pouvons écrire $\Delta = -1 * -1 * \Delta = -1 * i^2 * \Delta$ et donc $\sqrt{\Delta}$ devient $-\sqrt{i^2 * \Delta}$ soit $-i\sqrt{-\Delta}$

Mais comme x_1 et x_2 valent respectivement $(-b - \sqrt{\Delta})/2a$ et $(-b + \sqrt{\Delta})/2a$, en remplace $\sqrt{\Delta}$ par sa nouvelle valeur, nous pouvons écrire :

$$x_1 = -b + i\sqrt{-\Delta}/2a \text{ et}$$
$$x_2 = -b - i\sqrt{-\Delta}/2a$$

Δ étant négatif, on se retrouve à effectuer la racine carrée d'un nombre positif, et on peut exprimer écrire notre formules $f(x) = ax^2 + bx + c$ sous sa forme factorisée à l'aide de nombres complexes.

Exemple :

Factoriser $P(x) = x^2 + 2x + 5$

Ici $\Delta = -16 = 16 * i^2 = (4i)^2$

Donc

$$x_1 = -b + i\sqrt{-\Delta}/2a = (-2 + 4i)/2 = -1 + 2i$$
$$x_2 = -b - i\sqrt{-\Delta}/2a = (-2 - 4i)/2 = -1 - 2i$$

La forme factoriser de $f(x)$ est donc

$$f(x) = (x + 1 + 2i)(x + 1 - 2i)$$

$f(x)$ n'étant pas factorisable dans $\mathbb{R}$, mais l'étant dans $\mathbb{C}$, on dit que ce polynôme est irréductible sur $\mathbb{R}$.

NOTA : Tout polynôme de la forme $ax^2 + c$ où a et c ont le même signe ($a \cdot c > 0$) aura toujours un discriminant négatif car $\Delta = 0^2 - 4ac = -4ac < 0$.

11- Résolution par substitution

Pour résoudre une équation impliquant (par exemple) des fonctions trigonométriques comme $2 \cos^2(x) + 3 \cos(x) - 2 = 0$, on utilise une **méthode de substitution** pour la ramener à une équation polynomiale standard, puis on résout l'équation trigonométrique résultante.

L'équation est de la forme $2y^2 + 3y - 2 = 0$.

1. Poser la substitution : Soit $y = \cos(x)$.

2. Transformer l'équation celle-ci devient :

$$2y^2 + 3y - 2 = 0$$

3. Puis résoudre l'Équation du Second Degré en y

Nous utilisons le discriminant (Δ) pour trouver les valeurs possibles de y . L'équation est de la forme $ay^2 + by + c = 0$ avec $a = 2$, $b = 3$, et $c = -2$.

Calcul du Discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-2)$$

$$\Delta = 9 - (-16)$$

$$\Delta = 25$$

4. Calcul des Solutions y

Puisque $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles distinctes :

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 - 5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$y_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

5. Maintenant, revenons à x en résolvant $\cos(x) = y$.

Cas 1 : $\cos(x) = y_1$ Soit $\cos(x) = -2$

Puisque la fonction cosinus est définie dans l'intervalle $[-1, 1]$, l'équation $\cos(x) = -2$ est impossible dans les nombres réels. Donc $\mathbf{x} \in \emptyset$

Cas 2 : $\cos(x) = y_2$ Soit $\cos(x) = \frac{1}{2}$

Nous cherchons l'angle x dont le cosinus est $\frac{1}{2}$. L'angle principal (ou valeur principale) est :

$$x_0 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Puisque la fonction cosinus est paire et périodique (2π):

- Une famille de solutions est donnée par **l'angle principal** plus un multiple entier de 2π .
- L'autre famille de solutions est donnée par **l'opposé de l'angle principal** plus un multiple entier de 2π .

Les solutions générales sont donc :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

où k est un entier relatif ($k \in \mathbb{Z}$).

Conclusion : Les solutions de l'équation $2 \cos^2(x) + 3 \cos(x) - 2 = 0$ sont :

$$\mathbf{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2\mathbf{k}\pi \mid \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2\mathbf{k}\pi \mid \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \right\}$$