

Résoudre des équations et inéquations

1- Premier degré

a- Équations de premier degré

Résoudre $2x - 6 = 0$

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

Solution $S = \{3\}$

Nota : Vérifier que la/les solution(s) trouvée(s) est(sont) correcte(s).

Nota : La plupart du temps ce type d'équation admet une solution, mais il existe 2 cas particuliers :

- $2x + 2 = 2x - 2 \implies$ Aucune solution dans $\mathbb{R}$
- $x + 2 = x + 2 \implies$ Une infinité de solutions, car toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ vérifient cette équation.

b- Inéquations de premier degré

Résoudre $2x - 6 > 0$

$$2x - 6 > 0$$

$$2x > 6$$

$$x > \frac{6}{2}$$

$$x > 3$$

Solution $S =]3; +\infty[$

Nota : Vérifier que la/les solution(s) trouvée(s) est(sont) correcte(s).

Nota : La plupart du temps ce type d'inéquation admet un ensemble de solutions qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Attention :

Aux bornes $+\infty$ et $-\infty$, les crochets seront toujours ouverts.

Les valeurs limites seront exclues si l'inéquation est de type $>$ ou $<$ et incluses si elle est de type $\geq$ ou $\leq$.

c- Équations de produit nul

Résoudre $(2x - 6)(x - 4) = 0$

Ce produit est nul si au moins l'un des 2 membres $(2x - 6)$ ou $(x - 4)$ est nul. Donc

Si $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

Si $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

$S = \{3; 4\} \Rightarrow$ Les valeurs 3 et 4 sont les seules qui vérifient cette équation.

Nota : Vérifier que la/les solution(s) trouvée(s) est(sont) correcte(s).

d- Équation quotient

Exemple 1 :

Résoudre $(5x - 2)/(4x + 5) = 0$

Dans ce genre d'équation on doit considérer 2 choses :

1- Le dénominateur ne peut pas être nul car la division par 0 n'est pas possible. Donc

$$4x + 5 \neq 0$$

$$4x \neq -5$$

$$x \neq \frac{-5}{4}$$

2- L'expression prendra alors la valeur 0 si le numérateur est égal à 0, soit

$$5x - 2 = 0$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$$S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$$

Nota : Vérifier que la/les solution(s) trouvée(s) est(sont) correcte(s).

Exemple 2 :

$$(5x - 2)/(4x + 5) = 2$$

$$(5x - 2)/(4x + 5) = 2$$

$$(5x - 2) = 2(4x + 5)$$

$$5x - 2 = 8x + 10$$

$$3x = -12$$

$$x = -4$$

$$S = \{-4\}$$

Nota : Vérifier que la/les solution(s) trouvée(s) est(sont) correcte(s).

2- Second Degré

Dans tous les cas, il faut factoriser l'équation ...

a- Équation second degré simple

Exemple 1 :

Résoudre $x^2 - 81 = 0$

$$x^2 - 81 = 0$$

$$x^2 = 81$$

$$x = \sqrt{81}$$

$$x = 9 \text{ ou } x = -9$$

$$S = \{-9; 9\}$$

Nota : Vérifier que la/les solution(s) trouvée(s) est(sont) correcte(s).

Exemple 2 :

Résoudre $5x^2 - 7x = 0$

$$5x^2 - 7x = 0$$

$$x(5x - 7) = 0$$

Soit $x = 0$ ou $5x - 7 = 0 (x = \frac{7}{5})$

$$S = \{0; \frac{7}{5}\}$$

Nota : Vérifier que la/les solution(s) trouvée(s) est(sont) correcte(s).

Nota : Étant donné que $c = 0$, alors il n'y a que des x et des x^2 (si a et b non nuls), et donc 0 est forcément une des solutions de l'équation.

Exemple 3 :

Résoudre $(5x - 2)(4x + 5) - (4x + 5)(2x + 1) = 0$

$$(5x - 2)(4x + 5) - (4x + 5)(2x + 1) = 0$$

$$(4x + 5)(5x - 2 - 2x - 1) = 0$$

$$(4x + 5)(3x - 3) = 0$$

Donc $4x + 5 = 0$ ou bien $3x - 3 = 0$

$$S = \{-5/4; 1\}$$

Nota : Vérifier que la/les solution(s) trouvée(s) est(sont) correcte(s).

Nota : Dans ce cas de figure on remarque que $(4x + 5)$ est un membre commun aux 2 membres de l'expression, on donc on factorise par $(4x + 5)$.

Exemple 4 :

Tout autre équation de second degré se résout en la factorisant.

Donc en calculant d'abord le discriminant, puis x_1 et x_2 de façon à exprimer sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$. Et donc cela revient à résoudre :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$S = \{x_1; x_2\}$$

Nota : Vérifier que la/les solution(s) trouvée(s) est(sont) correcte(s).

Nota :

Si le discriminant est nul (égal à 0) alors $x_1 = x_2$.

Si le discriminant est négatif (< 0) alors pas de solution dans $\mathbb{R}$, mais des solutions existent dans $\mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes) !

a- Inéquation de second degré**Exemple 1 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $7x^2 + 3x - 2 > 3$:

Etape #1 : Passer la valeur de c à droite :

$$7x^2 + 3x - 2 > 3$$

$$7x^2 + 3x > 3 + 2$$

$$7x^2 + 3x > 5$$

Etape #2 : Factoriser par x le membre de gauche

$$7x^2 + 3x > 5$$

$$x(7x + 3) > 5$$

Etape #3 : On en déduit les solutions :

- soit $x > 5$ ou
- soit $7x + 3 > 5$

$$7x > 5 - 3$$

$$7x > 2$$

$$x > \frac{2}{7}$$

Ainsi tout nombre x supérieur strictement à $\frac{2}{7}$ ou supérieur à 5 est solution de l'équation, soit :

$$S =]5; +\infty[\cup \left] \frac{2}{7}; +\infty \right[= \left] \frac{2}{7}; +\infty \right[$$

Nota : On fait bien la réunion (Union) des 2 ensembles.

Nota : Vérifier que la/les solution(s) trouvée(s) est(sont) correcte(s).

Nota : On peut aussi tracer la courbe de cette équation et vérifier que toute valeur de $x > \frac{2}{7}$ a bien un y correspond supérieur à 3 !

Exemple 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $7x^2 + 3x - 2 > 3$

On va résoudre cela à l'aide du tableau de variations.

Dans ce cas, il convient de faire passer le membre de droite à gauche : $7x^2 + 3x - 5 > 0$
Ainsi on retrouve la valeur 0 à droite.

Or : nous savons que selon le signe de a , la courbe sera en $\cup$ ou bien en $\cap$

Nous savons aussi que cette inéquation peut admettre respectivement 2, 1 ou 0 solutions selon la valeur de Δ et que donc elle coupera l'axe des abscisses respectivement en 2 points, en 1 point ou en 0 points. En étudiant le tableau de variation de l'équation, on peut donc trouver l'ensemble des solutions permettant de résoudre une inéquation. Donc ...

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 7 \cdot -5 = 9 + 140 = 149$$

$$x_1 = (-3 + \sqrt{149})/14$$

$$x_2 = (-3 - \sqrt{149})/14$$

Maintenant que nous avons les racines du polynôme, nous pouvons étudier le signe de l'expression $7x^2 + 3x - 5$.

Tableau de variations : Un polynôme du second degré change de signe aux racines. De plus, le coefficient de x^2 étant positif (7), le polynôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

Ainsi, l'inéquation $7x^2 + 3x - 5 > 0$ est vérifiée pour :

- $x < \frac{-3 - \sqrt{149}}{14}$
- $x > \frac{-3 + \sqrt{149}}{14}$

La solution de l'inéquation $7x^2 + 3x - 2 > 3$ est donc :

$$x \in \left] -\infty; \frac{-3 - \sqrt{149}}{14} \right[\cup \left] \frac{-3 + \sqrt{149}}{14}; +\infty \right[$$

Conclusion : Exemple #1 vs Exemple #2

Nous voyons que entre la solution #1 et #2 nous n'obtenons pas les mêmes résultats ... c'est plutôt gênant ...

En fait, l'erreur se situe principalement à l'étape 3 de l'exemple #1.

Pourquoi cette méthode ne fonctionne pas ?

Lorsque nous avons une inégalité où un produit est strictement supérieur à un nombre positif (comme ici $x(7x + 3) > 5$), nous ne pouvons pas simplement déduire que chacun des facteurs est strictement supérieur à ce nombre.

Pourquoi ? Prenons un exemple simple : $(2)(-3) = -6$. Ici, ni 2 ni -3 sont strictement supérieurs à -6 , mais leur produit l'est.

En d'autres termes, le produit de deux nombres peut être positif même si l'un des deux est négatif.

Quelle est la bonne méthode ?

Il faut utiliser la méthode proposée dans l'exemple #2.

Qui plus est cette méthode fait appel à des choses connues (calcul de x_1 et x_2) et se vérifie graphiquement ainsi que dans le tableau de variations !