

Notions de base sur les dérivées et études de signes de fonctions

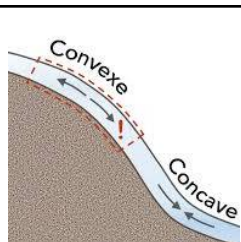
Soit f une fonction quelconque, on note f' (f prime) sa dérivée première et f'' (f seconde) sa dérivée seconde.

1- Définitions

f' , dérivée première de f	Définition : La dérivée première d'une fonction en un point représente la pente de la tangente à la courbe de la fonction en ce point. Interprétation géométrique : Elle indique si la fonction est croissante (pente positive), décroissante (pente négative) ou constante (pente nulle) en ce point. Informations fournies : • Extremums : Les points où la dérivée première s'annule correspondent aux extremums (maximums ou minimums) de la fonction. • Variations : Le signe de la dérivée première indique les intervalles où la fonction est croissante ou décroissante.
f'' , dérivée seconde de f	Définition : La dérivée seconde d'une fonction est la dérivée de la dérivée première. Interprétation géométrique : Elle renseigne sur la concavité de la courbe. • Concavité vers le haut : Si la dérivée seconde est positive, la courbe est concave vers le haut (forme de U). • Convexité vers le bas : Si la dérivée seconde est négative, la courbe est convexe vers le bas (forme de $\cap$). • Point d'inflexion : Un point où la dérivée seconde s'annule et change de signe est un point d'inflexion, où la courbe change de concavité. Informations fournies : • Points d'inflexion : Les racines de la dérivée seconde correspondent aux points d'inflexion de la fonction.

- **Concavité** : Le signe de la dérivée seconde indique les intervalles où la courbe est concave ou convexe.

Concept	Interprétation géométrique	Informations fournies
Dérivée première	Pente de la tangente	Variations, extremums
Dérivée seconde	Concavité de la courbe	Points d'inflexion, concavité



Exemple :

Le signe de la dérivée première sur un intervalle est négatif, la fonction est descendante. Toutefois elle peut être concave ou convexe. C'est l'étude du signe de sa dérivée seconde qui le dira.

2- Notions de dérivation

a- Notions principales

Les règles qui sont présentées ci-après concernent la dérivation de polynômes (tous degrés confondus) et les règles de dérivation pour les composées (addition, multiplication, division ... de termes dans les fonctions). On complète aussi par quelques règles de dérivation sur les Log, Ln, Exp et Trigonométrie, de façon à donner un aperçu suffisamment large sur la notion de dérivation.

NOTA : Pour faire une dérivée seconde de f , dériver d'abord f en f' , puis dériver f' en f'' en appliquant les mêmes règles de dérivation à dérivée.

Voici les principales dérivées à savoir :

- $(x^n)' = n.x^{n-1}$

De cela on peut déduire plusieurs forme de dérivation :

a. Exposant nul :

- $(a)' = (a^0)' = 0.a^{-1} = 0$ par conséquent la dérivé de toute constante a est 0.

b. Exposant positif :

- $(x)' = (x^1)' = 1.x^0 = 1$
- $(x^2)' = (x^2)' = 2.x^1 = 2x$
- $(x^3)' = (x^3)' = 3.x^2$
- ...

c. Exposant négatif :

- $(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = -1x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$
- $(\frac{1}{x^2})' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$
- $(\frac{1}{x^3})' = (x^{-3})' = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$
- ...

d. Exposant fractionnaire :

- $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}.x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}.x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}.x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}.\sqrt[3]{x}^{-2}$
- ...

En résumé, de la formule $(x^n)' = n.x^{n-1}$ on peut déduire toutes les dérivées de puissance positives, négatives, nulle ou fractionnaires. Cependant les plus usuelles (cf. tableau résumé des dérivées simples ci-après) peuvent être connues par cœur, il ne sera plus nécessaire d'essayer de les retrouver à partir de cette formule à chaque fois.

Autres dérivées à savoir par cœur :

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$

Nota : Pour la trigonométrie, cf. à la fin de ce chapitre sur la dérivation dans le sens horaire.

b- Les dérivées simples

En résumé, voici les dérivées simples usuelles.

$f(x)$	$f'(x)$
a (constante)	0
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$

c- Les dérivées composées

Cette fois ci on va dériver les formes de type u^2 , u^3 , $\ln(u)$, $\sqrt{u}$, $\cos(u)$... etc. u représente une expression elle même à dériver, comme par exemple $2x - 3$, $6x^2 + 2x$.. etc. C'est pour cela que l'on appelle ces dérivées des **dérivées composées**.

Dans ce cas il suffit de **multiplier** la dérivée de u (**donc** u') par la forme dérivée simple.

exemple : la dérivée de $\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{x^2}$. La forme dérivée simple de $\frac{1}{u}$ est donc $-\frac{1}{u^2}$, par conséquent $(\frac{1}{u})' = u' \cdot \frac{-1}{u^2}$.

Par conséquent :

$u(x)$	$u'(x)$
u^2	$u' \cdot 2u$

u^3	$u' \cdot 3u^2$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u' \cdot e^u$
$\cos(u)$	$-u' \cdot \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cdot \cos(u)$

d- Addition, multiplication de dérivées

$f(x)$	$f'(x)$
$u \cdot v$	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

e- Quelle règle appliquer pour dériver

On commence par identifier les formes de type “addition, multiplication” et on applique la formule correspondant. Ensuite on dérive selon les formes composées, puis enfin selon les formes simples.

Exemples :

f(x)	f'(x)
$(6x^2 + 3)(9x^3 - 2)$	Forme $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ $(6x^2 + 3)'(9x^3 - 2) + (6x^2 + 3)(9x^3 - 2)' =$ $(12x)(9x^3 - 2) + (6x^2 + 3)(27x^2)$ A ce stade la dérivation est acquise, cependant on peut continuer en

	développant et simplifiant l'expression, ce qui donnerait in fine : $270x^4 + 81x^2 - 24x$
$\frac{6x^2 + 3}{9x^3 - 2}$	$\text{Forme } \frac{u}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $\frac{(6x^2 + 3)'(9x^3 - 2) - (6x^2 + 3)(9x^3 - 2)'}{(9x^3 - 2)^2}$ $\text{soit } \frac{(12x)(9x^3 - 2) + (6x^2 + 3)(27x^2)}{(9x^3 - 2)^2}$

3- Tableau de variation

Le rôle d'un tableau de variation est d'étudier les intervalles sur lesquels la fonction f sera :

- croissante (dérivée première positive) ou décroissante (dérivée première négative).
- concave (dérivée seconde positive) ou convexe (dérivée seconde négative)

Donc on va construire un tableau qui va de $-\infty$ à $+\infty$ avec les valeurs remarquables pour lesquelles soit la fonction n'est pas définie, soit sa dérivée première et/ou seconde changera de signe.

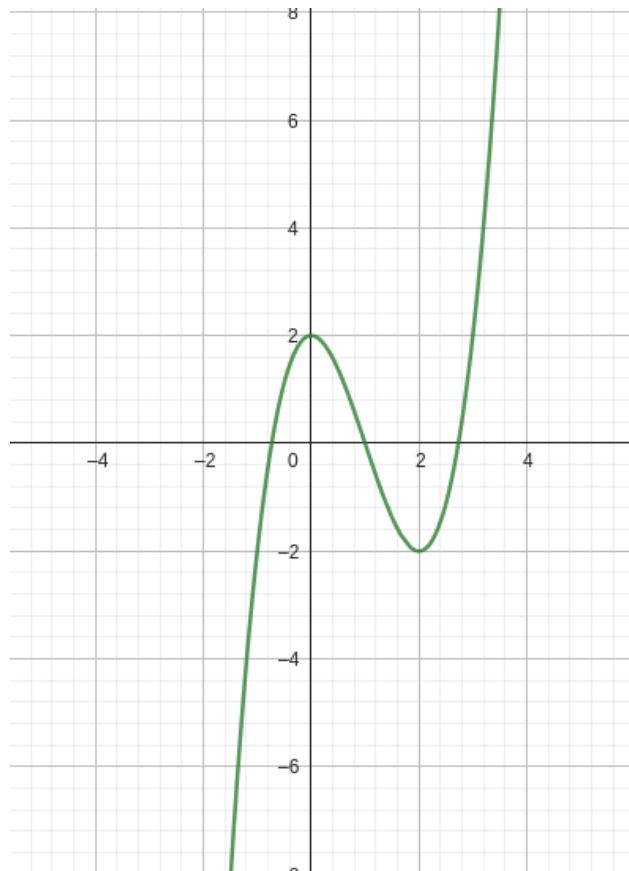
Prenons un exemple avec une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ou $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Voici ce que l'on peut dire :

- On a $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6$
- La dérivée première s'annule en 0 et en 2.
- La dérivée seconde s'annule en 1.
- La fonction est continue sur $\mathbb{R}$, à toute valeur de x , on peut associer une valeur de $f(x)$.

Avec ces informations, on peut construire le tableau (dit **tableau de variations**) suivant :

x	$-\infty$	0	$]0; 1[$	1	$]1; 2[$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-			0	+
$f''(x)$	-			0	+		
$f(x)$	f est croissante et convexe	Extremum	f est décroissante et convexe	Point d'inflexion	f est décroissant et concave	Extremum	f est croissante et concave

Confirmation visuelle :



Nota #1 : Si on avait étudié la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ par exemple, celle-ci n'est pas continue car pas définie pour $x = 0$. Il est donc important pour déterminer les intervalles du tableau de variation, de prendre en considération :

- Les valeurs pour lesquelles la fonction n'est pas définie
- Les valeurs pour lesquelles la dérivée première s'annule et changera donc de signe.
- Les valeurs pour lesquelles la dérivée seconde s'annule et changera donc de sens de convexité/concavité.

Nota #2 : Quelles que soient les fonctions $f(x)$ étudiées, la démarche sera toujours la même !

4- Taux d'accroissement

Objectif : Démontrer qu'une fonction f est dérivable en un point a et calculer la valeur de sa dérivée en ce point.

Définition : Une fonction est dérivable en un point a lorsque la limite de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ **tend vers un nombre fini** lorsque h tend vers 0 :

Rappel : un nombre fini est un nombre qui n'a pas un nombre infini de décimales (Π , Φ ...) et dont les décimales ne se répètent pas indéfiniment de façon périodique (3.123123123 ...)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = x, \text{ ou } x \text{ est fini, alors } f \text{ est dérivable en } a.$$

Exemple : soit $f(x) = 3x^2 + 1$. f est-elle dérivable en 2 ?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 \cdot (2+h)^2 + 1) - (3 \cdot 2^2 + 1)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4 + 4h + h^2) + 1 - 14}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 12h}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (3h + 12) = 12$$

f est donc dérivable en 2 et sa dérivée tend vers 12 en ce point.

Ceci peut se vérifier :

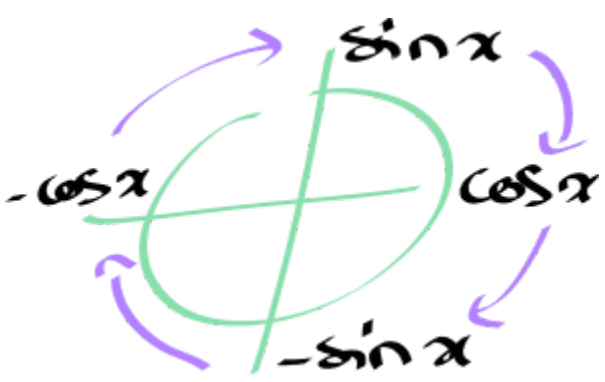
$$f'(x) = (3x^2 + 1)' = 6x$$

$$f'(2) = 12$$

CQFD !

5- Autres dérivées de fonctions.

Autres dérivées composées	
Fonction f	Dérivée f'

Fonction Log décimal (log en base 10) $f(x) = \log(x)$	$f'(x) = \frac{1}{(x \cdot \ln(10))}$
Fonction Log Népérien (log en base e avec $e = 2,71828$) $f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$ Nota : e est un irrationnel, tout comme Π (3.14159) ou Φ (1,6180339)
Fonction Exponentielle (toujours avec $e = 2,71828$) $f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$ La dérivée de exponentielle de x est exponentielle de x !!!
Fonction $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$...	$\sin(x)' = \cos(x)$ et $\cos(x)' = -\sin(x)$ En fait pour dériver sin et cos, il faut tourner avec le cercle trigonométrique dans le sens HORAIRE.  $(\tan(x))' =$ $\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' =$ $\frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$ $\frac{1}{\cos^2(x)}$

	Nota : Pour intégrer (primitiver), on tourne dans le sens anti-horaire, c'est-à-dire le sens trigonométrique. La notion de Primitive/Intégrale sera abordée plus-tard ...								
Et plus encore ...	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Structure de la fonction</th><th>Structure de la dérivée</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\sin u$</td><td>$u' \cos u$</td></tr> <tr> <td>$\cos u$</td><td>$-u' \sin u$</td></tr> <tr> <td>$\tan u$</td><td>$\frac{u'}{\cos^2 u} = u' (1 + \tan^2 u)$</td></tr> </tbody> </table>	Structure de la fonction	Structure de la dérivée	$\sin u$	$u' \cos u$	$\cos u$	$-u' \sin u$	$\tan u$	$\frac{u'}{\cos^2 u} = u' (1 + \tan^2 u)$
Structure de la fonction	Structure de la dérivée								
$\sin u$	$u' \cos u$								
$\cos u$	$-u' \sin u$								
$\tan u$	$\frac{u'}{\cos^2 u} = u' (1 + \tan^2 u)$								

6- Attention aux dérivées de fonctions composées ...

Imaginons que l'on doive dériver la fonction $\ln(3x^2 - 2x + 3)$

On sait que la dérivée de $\ln(x)$ est $\frac{1}{x}$

Mais si on se contente de cela, on obtiendrait $\ln(3x^2 - 2x + 3)' = \frac{1}{3x^2 - 2x + 3}$

Mais évidemment ceci n'est pas correct puisque nous devons aussi dériver le polynôme $3x^2 - 2x + 3$

Nous devons donc considérer que nous sommes face à une fonction composée comme $\ln(u)$ ou $u = 3x^2 - 2x + 3$.

Cette règle est valable pour toutes les expressions composées. Par exemple e^{3x^2-2x+3} est une fonction composée de la forme e^u .

Dès que l'on identifie une forme composée telle quelle, on doit appliquer la règle suivante pour dériver cette fonction composée qu'on appellera $h(x) = f(g(x))$ avec dans l'exemple $g(x) = (3x^2 - 2x + 3) = u$ et $f(x) = \ln(u)$

Ainsi, pour dériver $h(x)$ on applique la formule suivante : **La dérivée de la petite $g(x)$ fois la dérivée de la grosse $f(x)$ appliquée à la petite.** Soit :

$$h'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

$$h'(x) = (3x^2 - 2x + 3)' \cdot \ln(3x^2 - 2x + 3)'$$

$$h'(x) = \frac{(6x - 2) \cdot 1}{(3x^2 - 2x + 3)}$$

$$h'(x) = \frac{(6x - 2)}{(3x^2 - 2x + 3)}$$