Logique mathématique

1- Définition et convention d'écriture

Négation	Opérateur Non	Ā
Conjonction	Opérateur Et	A et B - $A \wedge B$
Disjonction	Opérateur Ou	*A ou B* - A ⋁ B
Implication	Opérateur ⇒	A ⇒ B
Equivalence	Opérateur ⇄	A ⇄ B

2- Table de vérité

2.1 - Négation

A	**Ā**
V	F
F	V

2.2 - Conjonction

A	**B**	**A et B**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

2.3 - Disjonction

A	**B**	**A ou B**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Attention, le OU est dit Inclusif dans ce cas, il existe un **OU exclusif**. Dans ce cas V ou V donne F !

2.4 - Implication

A	**B**	**A ⇒ B**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

3. Démonstration

3.1 Par l'absurde

Définition : La **démonstration par l'absurde**, ou *reductio ad absurdum*, est un type de raisonnement logique qui prouve qu'une affirmation est vraie en montrant que sa négation mène à une contradiction.

Comment faire ?

Le principe de la démonstration par l'absurde repose sur trois étapes principales :

1. **Supposition** : On suppose que l'affirmation que l'on veut prouver est fausse.
2. **Déduction** : On tire des conclusions logiques de cette supposition.
3. **Contradiction** : On arrive à une conclusion qui est manifestement fausse ou qui contredit une de nos hypothèses de départ.

Puisque la supposition initiale a conduit à une absurdité, elle est nécessairement fausse. Par conséquent, l'affirmation de départ doit être vraie.

Exemple

Imagine que tu es à l'intérieur d'une maison et que tu veux prouver à quelqu'un qu'il ne pleut pas dehors.

1. **Supposition par l'absurde** : Tu commences par supposer le contraire. Tu dis : "Supposons qu'il pleuve dehors."
2. **Déduction** : Si cette supposition est vraie, alors il doit y avoir des signes de pluie. Par exemple, tu devrais voir des gouttes d'eau sur la vitre. Tu devrais aussi entendre le bruit de la pluie qui tombe.
3. **Contradiction** : Tu regardes par la fenêtre et tu constates qu'il n'y a pas une seule goutte sur la vitre. Tu écoutes et tu n'entends aucun bruit de pluie. Tes observations contredisent directement ta supposition initiale.
4. **Conclusion** : Comme la supposition ("il pleut dehors") a mené à une contradiction avec ce que tu observes dans le monde réel, c'est que cette supposition est fausse. Par conséquent, la seule conclusion logique est qu'il ne pleut pas dehors.

3.2 Par la contraposé d'un proposition

Définition

Soit une implication de la forme : **Si P alors Q** *notée en logique :* $P \Rightarrow Q$

La **contraposée** de cette implication est : **Si non-Q alors non-P** *notée en logique :* $\neg Q \Rightarrow \neg P$

L'équivalence logique signifie que la vérité de l'une implique la vérité de l'autre, et la fausseté de l'une implique la fausseté de l'autre. En d'autres termes, $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Exemple simple

- **Proposition initiale :** Si un nombre est un multiple de 4, alors il est pair.
  - P : "un nombre est un multiple de 4"
  - Q : "il est pair"
- **Contraposée :** Si un nombre n'est pas pair, alors il n'est pas un multiple de 4.
  - $\neg Q$: "un nombre n'est pas pair" (c'est-à-dire, il est impair)
  - $\neg P$: "il n'est pas un multiple de 4"

Prouver que la deuxième affirmation (la contraposée) est vraie prouve aussi que la première (l'énoncé initial) est vraie. La démonstration par contraposition est souvent utilisée lorsqu'il est plus facile de prouver la contraposée que l'énoncé original.